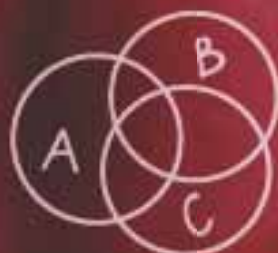
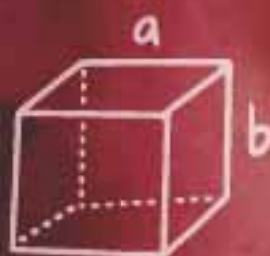


$$P = 6a^2$$



MATEMATIKA

ZA SEDMI RAZRED
U OSNOVNOM
OBRAZOVANJU

7

UDŽBENIK

$$3x + 4 = 6x + 1$$

$$3x - 6x = 1 - 4$$

$$-3x = -3$$

$$9^2 = 81$$



Dr Valentina Gogovska | Snežana Ristovska

MATEMATIKA

ZA SEDMI RAZRED
OSNOVNOG
OBRAZOVANJA

7

UDŽBENIK



Skoplje, 2026
(drugo izdanje)

MATEMATIKA 7 za sedmi razred osnovnog obrazovanja udžbenik
Drugo izdanje

Izdavač:

Društvo za izdavačku djelatnost, proizvodnju, promet i usluge ALBI d.o.o. Skoplje

Urednik:

Elena Stefanovska

Autori:

Dr Valentina Gogovska

Snežana Ristovska

Prijevod s makedonskog jezika:

(„Математика 7 учебник за седмо одделение во основно образование“, АЛБИ 2025)

Verica Rastoder

Jezička redakcija:

Jasmina Mašović

Likovno i grafičko oblikovanje:

Public Diplomacy Skoplje

Štampa:

Branko Gapo – grafičko proizvodstvo, Skoplje 2026

Tiraž:

30

Sva prava su zadržana. Nijedan dio ove knjige ne smije biti mijenjan ili prenošen u bilo kojem obliku ili na bilo koji način, elektronski ili mehanički, uključujući fotokopiranje, snimanje ili pohranjivanje u sistem za ponovno pronalaženje bez pismene saglasnosti izdavača.

Ovaj udžbenik je odobren za upotrebu u devetogodišnjem osnovnom obrazovanju, Odlukom o odobravanju i upotrebi udžbenika za nastavni predmet MATEMATIKA za 7. razred osnovnog obrazovanja broj 26-913/1 od 22.08.2025. godine, Ministarstvo prosvjete i nauke Republike Sjeverne Makedonije.

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(075.2)=163.4(497.6)

GOGOVSKA, Valentina

Matematika 7 : udžbenik za sedmi razred osnovnog obrazovanja / Valentina Gogovska, Snežana Ristovska ; prijevod s makedonskog jezika Verica Rastoder. - [2. izd.]. - Skoplje : Albi, 2026. - 384 str. : илустр. ; 27 см

Превод на делото: Математика 7, учебник за седмо одделение во основно образование

ISBN 978-608-241-080-7

1. Ristovska, Snežana [автор]

COBISS.MK-ID 69149701

UVOD

Korak po korak – podsjećajući vas na ono što već znate i nadograđujući vas novim znanjem, primjerima i zadacima iz svakodnevnog života. Čekaju vas izazovi koji će razvijati vašu logiku, kreativnost i samostalno razmišljanje. Ne bojte se grešaka – one su dio učenja.

Pored toga, imat ćete priliku koristiti i digitalne alate za lakše i zanimljivije vježbanje.

Matematika nije samo školski predmet – ona je način razmišljanja i razumijevanja svijeta. Budite hrabri, postavljajte pitanja i uživajte u ovoj matematičkoj avanturi!

Želimo vam uspjeh i sreću.

Autorski tim

Sadržaj

Tema 1: Brojevi i operacije s brojevima

Operacije sa skupovima	9
Svojstva operacija presjeka i unije skupova	16
Skup uređenih parova	21
Cijeli brojevi. Upoređivanje i uređivanje	26
Apsolutna vrijednost	31
Sabiranje cijelih brojeva sa istim ili različitim znacima	36
Svojstva operacije sabiranja cijelih brojeva	42
Jednačine tipa $x + a = b$. Oduzimanje cijelih brojeva	46
Množenje cijelih brojeva	50
Svojstva operacije množenja cijelih brojeva	55
Dijeljenje cijelih brojeva	59
Vrijednost brojnog izraza	63
Stepen sa pokazateljem prirodan broj	68
Kvadrati i kvadratni korijeni do 100	73
Upoređivanje razlomaka	77
Periodični decimalni brojevi	82
Opisivanje, računanje i upoređivanje dijelova cjeline sa razlomcima i procentima	86
Sabiranje razlomaka	90
Oduzimanje razlomaka	94
Množenje razlomaka	98
Dijeljenje razlomaka	103
Sabiranje i oduzimanje decimalnih brojeva sa različitim brojem decimala	108
Množenje i dijeljenje decimalnih brojeva	112
Veza između razmjera i dijela cjeline	117
Primjena pravoproporcionalnosti u realnim situacijama	121

Tema 2: Geometrija

Kružnica i krug	127
Tangenta kružnice	133
Grafičko sabiranje i oduzimanje duži	136
Konstrukcija paralelnih i normalnih pravih. Simetrala duži	142
Konstrukcija geometrijskih elemenata obrazovnim softverom	148
Osnovni pojmovi o uglovima i poluravninama	152
Mjerenje, procjenjivanje i crtanje uglova	157
Centralni ugao	162
Operacije s uglovima	168
Grafičko sabiranje i oduzimanje uglova	173
Konstrukcija simetrale ugla i uglova od 60° , 30° , 15° , 90° , 45°	177
Transverzale i paralelne prave	182
Konveksni i nekonveksni mnogouglovi	186
Osnovni pojmovi o trouglovima	190
Konstrukcija trouglova	194

Konstrukcija opisane i upisane kružnice trougla	199
Četvorouglovi i klasifikacija prema paralelnosti stranica	203
Zbir uglova u četvorouglu	208
Paralelogram i svojstva paralelograma	211
Vrste paralelograma i njihova svojstva	217
Osnova simetrija u koordinatnom sistemu	223
Translacija u koordinatnom sistemu	228
Rotacija mnogougla i primjena	233
Predstavljanje 3D-oblika u različitim projekcijama	237

Tema 3: Algebra

Osnove algebre. Članovi, izrazi i jednačine	243
Pojednostavljivanje linearnog izraza. Računanje vrijednosti	247
Formule. Izražavanje jedne promjenljive preko druge	251
Linearna jednačina s jednom nepoznatom. Rješenje jednačine	255
Nizovi cijelih brojeva	259
Predstavljanje jednostavnih funkcija	264
Grafički prikaz linearne funkcije i koordinatni parovi	268
Grafici linearnih funkcija paralelnih x - ili y -osi	273

Tema 4: Mjerenje

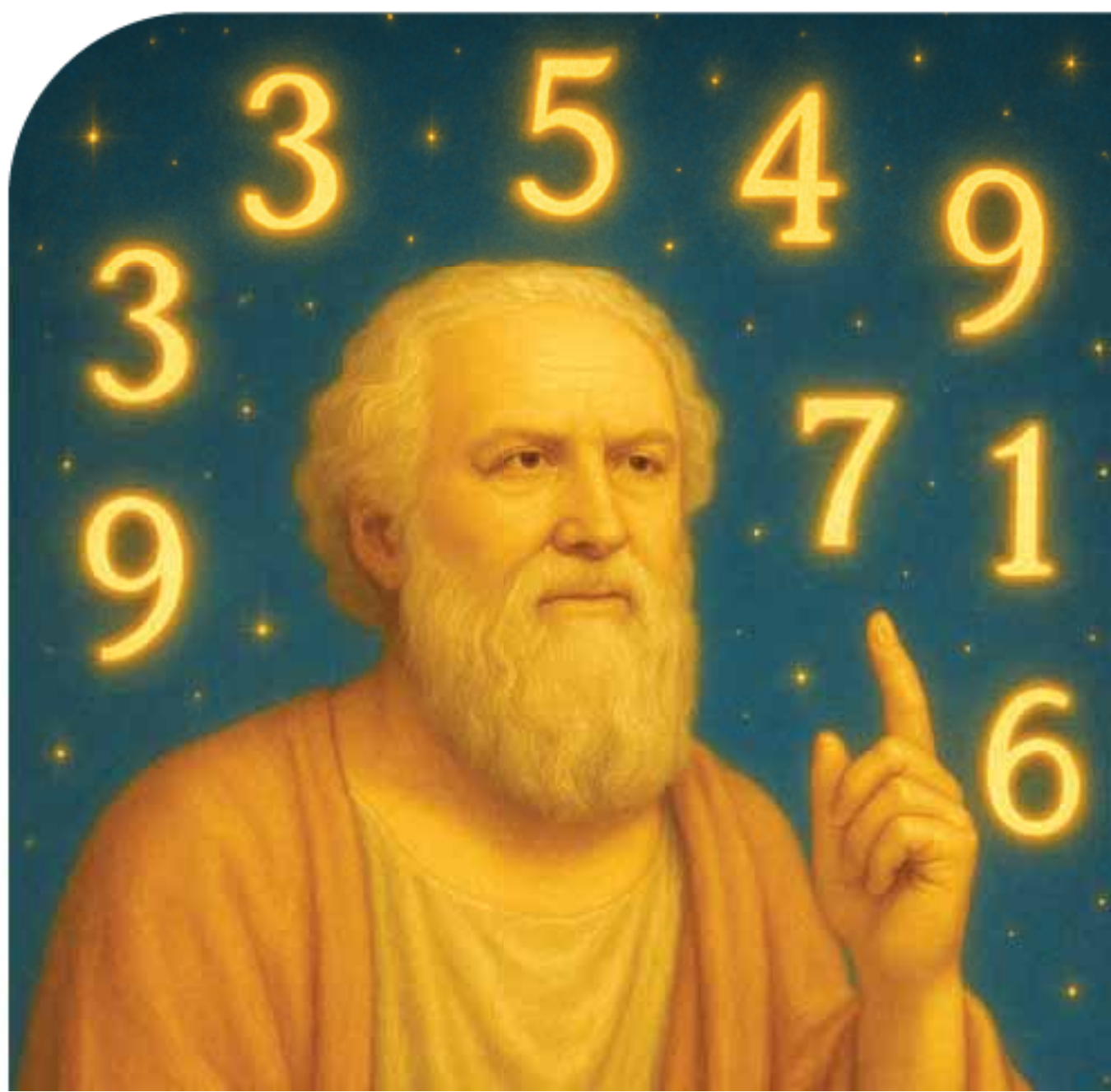
Mjerni instrumenti za dužinu i mjerne jedinice. Mikron	279
Mjerni instrumenti za masu i pretvaranje mjernih jedinica za masu	285
Mjerenje i mjerne jedinice za zapreminu	289
Vrijeme. 12-časovni i 24-časovni sistem	294
Proračun vremenskih intervala i rad sa grafikonom	302
Perimetar trougla i četverougla	310
Površina složenih 2D-formi	317
Volumen i mjerne jedinice za volumen	321
Volumen kvadra i kocke	326
Proračun površine kocke i kvadra pomoću njihovih mreža	330

Tema 5: Rad sa podacima

Planiranje istraživanja	337
Prikupljanje i organizacija podataka za istraživanje	342
Stubičasti i kružni dijagram	347
Crtanje i tumačenje linijskog dijagrama i piktograma	353
Modalna klasa i dijagram frekvencije za grupisane podatke	360
Procjena i računanje aritmetičke sredine. Poređenje dva skupa podataka	366
Ishodi. Vjerovatnost	373
Eksperimentalna i teorijska vjerovatnoća	378

TEMA
1

BROJEVI I OPERACIJE SA BROJEVIMA



Platonska Akademija i magija brojeva

U Antičkoj Grčkoj, u Platonskoj Akademiji, broj nije bio samo sredstvo za brojanje, već nešto sveto, uzvišeno. Platon i njegovi učenici vjerovali su da je sve broj – svaki dio prirode, od muzike do kretanja planeta, može se razumjeti kroz brojeve.

Brojevi, za Platona, nisu bili samo apstrakcije, već su bili savršene ideje, vječne i nepromjenjive.

Čak i kada ih ne vidimo, brojevi postoje. Oni simboliziraju red, logiku i harmoniju u prirodi i u ljudskoj misli.

„Kada razumijete kako se povezuju brojevi, matematika postaje kao mapa koja vas vodi ka rješenju.“

Rezultati učenja

Nakon izučavanja ove teme bit ćeš sposoban/sposobna da:

- primjenjuješ operacije sa skupovima u rješavanju problema;
- primjenjuješ cijele brojeve i apsolutnu vrijednost cijelog broja u svakodnevnom kontekstu;
- koristiš aritmetičke zakone i inverzne operacije za pojednostavljivanje računanja sa cijelim brojevima;
- koristiš stepene s prirodnim brojem kao eksponentom i kvadratni korijen određenih prirodnih brojeva u rješavanju problema;
- koristiš vezu između razlomaka, decimalnih brojeva i procenata pri rješavanju problema iz svakodnevnog konteksta;
- rješavaš probleme iz svakodnevnog konteksta pomoću operacija s pozitivnim racionalnim brojevima;
- rješavaš probleme s razmjerom i pravoporcionalnošću.

Operacije sa skupovima

U ovoj lekciji naučit ćeš kako izvoditi različite operacije nad skupovima koje će ti pomoći da razumiješ kako se različite grupe elemenata mogu međusobno povezivati ili razlikovati. Kroz primjere i zadatke otkrit ćeš kako se skupovi primjenjuju u matematici i u stvarnom životu, poput organiziranja podataka, analiziranja zajedničkih obilježja i donošenja logičkih zaključaka.



Primjer 1

U školskom dvorištu, učenici iz tri različita odjeljenja žele igrati različite sportove. Prema sportu koji igraju, raspoređeni su u sljedeće skupove:

- Učenici koji igraju fudbal su elementi skupa A; $A = \{\text{Ana, Marko, Tina}\}$
- Učenici koji igraju košarku su elementi skupa B; $B = \{\text{Tina, Petar, Martin}\}$
- Učenici koji igraju odbojku su elementi skupa C; $C = \{\text{Ana, Martin, Lana}\}$

- Koji učenici pripadaju skupu A?
- Koji učenici pripadaju skupu B, a ne pripadaju skupu A?
- Koji učenici žele igrati i fudbal i košarku?
- Zapiši po jedan podskup od A i od B.
- Koji učenici ne igraju nijedan od ovih sportova ako znamo da su u školskom dvorištu učenici iz sljedećeg skupa $\{\text{Ana, Marko, Tina, Petar, Martin, Jana, Luka, Lana}\}$?

Rješenje:

- Učenici koji pripadaju skupu A (koji žele igrati fudbal) su: Ana, Marko, Tina, ili možemo zapisati: $\text{Ana} \in A$, $\text{Marko} \in A$ i $\text{Tina} \in A$.
- Učenici koji pripadaju skupu B (koji žele igrati košarku) su: Tina, Petar, Martin, ili: $\text{Tina} \in B$, $\text{Petar} \in B$ i $\text{Martin} \in B$.
Od ovih učenika, oni koji ne igraju fudbal, tj. ne pripadaju skupu A, su: Petar i Martin, ili možemo zapisati: $\text{Petar} \notin A$, $\text{Martin} \notin A$.
- Učenik koji igra i fudbal i košarku je samo Tina.
- Podskup od A je skup $A_1 = \{\text{Tina}\}$ i možemo zapisati $A_1 \subseteq A$.
Podskup od B je skup $B_1 = \{\text{Tina, Petar}\}$ i možemo zapisati $B_1 \subseteq B$.
Naravno, postoji i drugih podskupova, ali se tražio samo po jedan, bilo koji.
- Učenike koji ne igraju nijedan od ovih sportova dobit ćemo kada iz skupa svih učenika u dvorištu $S = \{\text{Ana, Marko, Tina, Petar, Martin, Jana, Luka, Lana}\}$ isključimo učenike koji žele igrati barem jedan sport. Jana i Luka ne igraju nijedan od ovih sportova.

Zadatak 1

Prikaži Vennovim dijagramom skupove: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ i $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Primjer 2

Za dati školski projekat, učenici su trebali napraviti istraživanje s ciljem da saznaju koliki je interes za sportske, umjetničke i druge vannastavne aktivnosti.

Kao rezultat istraživanja dobili su sljedeće skupove:

Učenici koji učestvuju u sportskim aktivnostima su elementi skupa $A = \{\text{Marija, Luka, Jana, Petar, Tina}\}$.

Učenici koji učestvuju u umjetničkim aktivnostima su elementi skupa $B = \{\text{Luka, Tina, Stefan, Ana, Jana}\}$.

- Koji učenici učestvuju i u sportskim i u umjetničkim aktivnostima?
- Zapiši elemente presjeka skupova A i B koristeći znak za operaciju presjeka skupova $A \cap B$.
- Prikaži presjek skupova A i B pomoću Vennovog dijagrama.

Rješenje:

- Učenici koji učestvuju i u sportskim i u umjetničkim aktivnostima su: Luka, Jana, Tina. Možemo sa C označiti skup kojem pripadaju učenici iz A i B : $C = \{\text{Luka, Jana, Tina}\}$. Skup C nazivamo presjek skupova A i B .

Presjek dva skupa je skup sastavljen od zajedničkih elemenata oba skupa.

Drugim riječima, ako su data dva skupa A i B , tada je njihov presjek, označen kao $A \cap B$, skup $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$.

- U našem primjeru, presjek skupova A i B , koristeći znak za operaciju presjeka skupova, zapisujemo:
 $A \cap B = C = \{\text{Luka, Jana, Tina}\}$.
- Presjek skupova je prikazan Vennovim dijagramom.

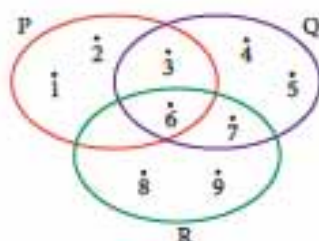


Dva skupa A i B koja nemaju zajedničkih elemenata, odnosno za koja je $A \cap B = \emptyset$, nazivaju se disjunktni skupovi.

Zadatak 2

Koristeći crtež na kojem su Vennovim dijagramom predstavljeni skupovi P, Q i R, zapiši skupove:

- a) $P \cap Q$ b) $Q \cap R$ c) $P \cap Q \cap R$



Primjer 3

U jednoj školi učenici se upisuju na različite sekcije prema svojim interesima.

Data su dva skupa:

Učenici koji pohađaju sekciju iz matematike, su elementi skupa

$A = \{\text{Marija, Petar, Ana, Jovan}\}$.

Učenici koji pohađaju sekciju iz informatike su elementi skupa

$B = \{\text{Jovan, Ana, Luka, Elena}\}$.

- a) Koji učenici su upisani na barem jednu od sekcija (u A ili u B)?
b) Zapiši elemente unije skupova A i B koristeći znak za uniju skupova $A \cup B$.
c) Opiši šta predstavlja unija skupova A i B u kontekstu sekcija.

Rješenje:

- a) Učenici iz skupova A i B koji pohađaju barem jednu od sekcija formiraju novi skup koji možemo označiti, na primjer, s D, odnosno $D = \{\text{Marija, Petar, Ana, Jovan, Luka, Elena}\}$. Skup D nazivamo unija skupova A i B.

Unija dva skupa je skup sastavljen od svih elemenata oba skupa. Drugim riječima, ako su data dva skupa A i B, tada je njihova unija, označena kao $A \cup B$, skup $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ili } x \in B\}$.

- b) Unija skupova A i B je skup D: $A \cup B = \{\text{Marija, Petar, Ana, Jovan, Luka, Elena}\}$ ili $D = A \cup B = \{\text{Marija, Petar, Ana, Jovan, Luka, Elena}\}$.
c) Unija $A \cup B$, zapravo, jest skup D sastavljen od svih učenika koji pohađaju barem jednu od sekcija. To znači da, ako je učenik dio sekcije iz matematike, informatike ili obje, on će biti element ovog skupa.

Zadatak 3

Dati su skupovi: $A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, $B = \{13, 14, 15, 16\}$ i $C = \{14, 15, 16, 17, 18\}$.

- a) Prikaži skupove Vennovim dijagramom.
b) Odredi i zapiši skupove: $A \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A \cup (B \cap C)$.

Zadatak 4

U jednom supermarketu postoje dvije vrste popusta:

Proizvodi sa popustom ako kupiš dva ista proizvoda,

skup $P = \{\text{hljeb, mlijeko, jogurt, sir}\}$.

Proizvodi sa popustom ako koristiš karticu za popust,

skup $D = \{\text{mlijeko, sir, kafa, riža}\}$.

- Koji proizvodi imaju popust ako kupiš dva ista i ako koristiš karticu?
- Koji proizvodi imaju popust ako važi barem jedan od dva uslova?
- Kakva je razlika između upotrebe „i“ i „ili“ u ovim pitanjima?
- Zapiši odgovore koristeći matematičke operacije presjeka $\cap$ i unije $\cup$.
- Koji izraz bi koristio ako želiš kupiti proizvode koji imaju oba popusta istovremeno?
- Koji izraz bi koristio ako želiš kupiti proizvode koji imaju barem jedan od popusta?

Primjer 4

U jednoj biblioteci postoje dvije grupe knjiga:

Knjige koje su dostupne za iznajmljivanje, skup $A = \{\text{„Hari Poter“, „Gorski car“, „Mali princ“, „Alisa u zemlji čuda“, „Robinzon Kruso“}\}$.

Knjige koje su trenutno iznajmljene, skup $B = \{\text{„Mali princ“, „Alisa u zemlji čuda“, „Robinzon Kruso“}\}$.

- Koje knjige su dostupne za iznajmljivanje, ali trenutno nisu iznajmljene?
- Kako se ovo može zapisati matematički kao razlika skupova?
- Kako se ovo može prikazati Vennovim dijagramom?
- Kako bi opisao ovu razliku riječima?

Rješenje:

- Knjige koje su dostupne, ali nisu iznajmljene su: knjige koje se nalaze u skupu A , ali ne i u skupu B , odnosno skup $\{\text{„Hari Poter“, „Gorski car“}\}$. Ovaj skup se naziva razlika skupova A i B .

Skup svih elemenata koji pripadaju skupu A , a ne pripadaju skupu B , naziva se razlika skupa A sa skupom B . Drugim riječima, ako su data dva skupa A i B , tada je njihova razlika, označena kao $A \setminus B$, skup $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$.

- b) Matematički zapis:
 $A \setminus B = \{ \text{„Hari Poter“, „Gorski car“} \}.$
- c) Na datom crtežu razlika skupova $A \setminus B$ je prikazana obojenim dijelom dijagrama.
- d) Razlika $A \setminus B$ predstavlja knjige koje biblioteka ima na raspolaganju, ali koje trenutno nisu iznajmljene.



Zadatak 5

Dati su skupovi $M = \{x \mid x \text{ je dvocifren prirodan broj}\}$ i $N = \{12, 14, 16, 18, 100\}$.

- a) Prikaži skupove Vennovim dijagramom.
- b) Odredi i zapiši skupove: $M \setminus N$, $N \setminus M$, $N \cap M$.

Primjer 5

Ana, Bobi i Kalina planiraju aktivnosti za vikend. Svako od njih ima različite ideje o tome šta želi da radi.

Aktivnosti koje Ana želi da radi su date skupom

$A = \{ \text{planinarenje, kino, biciklizam, trčanje} \}.$

Aktivnosti koje Bobi želi da radi su date skupom

$B = \{ \text{videoigre, kino, košarka, biciklizam} \}.$

Aktivnosti koje Kalina želi da radi su date skupom

$C = \{ \text{planinarenje, plivanje, kino, joga} \}.$

Pomozi im da odluče šta mogu da rade zajedno i koje aktivnosti će svako raditi pojedinačno!

- a) Koje aktivnosti mogu da rade sva trojica zajedno?
- b) Koje aktivnosti mogu da rade barem dvoje od njih?
- c) Koje aktivnosti se mogu izabrati ako važi barem jedan od prijedloga?
- d) Koje aktivnosti želi Ana, a Bobi ne?
- e) Kako ovo možemo prikazati Vennovim dijagramom?



Rješenje:

a) Aktivnosti koje mogu da rade sva trojica: $A \cap B \cap C = \{ \text{kino} \}.$

b)* Aktivnosti koje mogu da rade barem dvoje:

- Za Anu i Bobija, zajedničke aktivnosti su kino i biciklizam, odnosno $F = A \cap B = \{ \text{kino, biciklizam} \}.$
- Za Anu i Kalinu, zajedničke aktivnosti su planinarenje i kino, odnosno $D = A \cap C = \{ \text{planinarenje, kino} \}.$
- Za Bobija i Kalinu, zajednička aktivnost je kino, odnosno $E = B \cap C = \{ \text{kino} \}.$

Ako napravimo uniju skupova C , D i E , dobit ćemo skup u kojem barem dvoje žele istu aktivnost, odnosno: $C \cup D \cup E = \{ \text{kino, biciklizam, planinarenje} \}.$

- c) Aktivnosti koje barem jedan od njih želi da radi:
 $A \cup B \cup C = \{\text{planinarenje, kino, biciklizam, trčanje, videoigre, košarka, plivanje, joga}\}.$
- d) Aktivnosti koje želi Ana, a Bobi ih ne želi:
 $A \setminus B = \{\text{planinarenje, trčanje}\}.$
- e) Vennov dijagram je prikazan na crtežu.



Zadatak 6

Jedan turist planira putovanje i ima tri moguće opcije prevoza:

1. Prevozna sredstva koja su brza, skup $A = \{\text{avion, voz}\}.$
2. Prevozna sredstva koja su jeftina, skup $B = \{\text{autobus, voz}\}.$
3. Prevozna sredstva koja su udobna, skup $C = \{\text{avion, voz, brod}\}.$
 - a) Koja prevozna sredstva su brza i jeftina?
 - b) Koja prevozna sredstva su brza ili udobna?
 - c) Koja prevozna sredstva pripadaju svim trima skupovima?
 - d) Kako možeš da prikažeš izbor Vennovim dijagramom?

Možeš li navesti primjer iz svoje svakodnevice gdje koristiš operacije sa skupovima ($\cap$, $\cup$, $\setminus$) pri donošenju odluka? Objasni kako ih primjenjuješ.

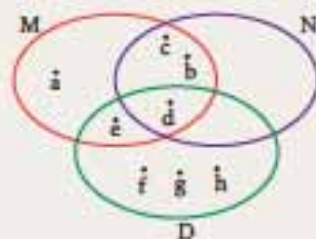
Napravi misaonu mapu za sve što znaš o skupovima i operacijama nad skupovima. Primjer misaone mape za pojam „trougao“ dat je na crtežu.



Samostalni rad

1. Na crtežu su data skupovi M , N i D .

- Zapiši skupove M , N i D na tabelaran način.
- Odredi: $M \cap N$, $N \cap D$, $M \cap D$.
- Odredi: $M \cup N$, $N \cup D$, $M \cup D$.
- Odredi: $M \setminus N$, $N \setminus D$, $M \setminus D$.

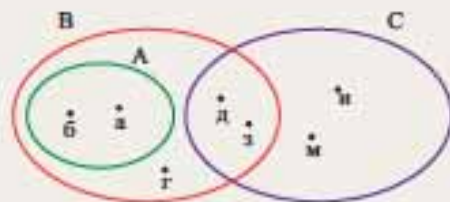


2. Ako je $M = \{10, 12, 14, 16\}$, a $N = \{9, 10, 11, 12, 13\}$, koje od sljedećih skupova: $\{9, 10, 11, 12, 14, 16\}$, $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$, $\{10, 12\}$, $\{14, 16\}$, $\{14, 16, 9, 13\}$, $\{9, 11, 13\}$, predstavlja presjek, uniju i razliku skupova M i N .

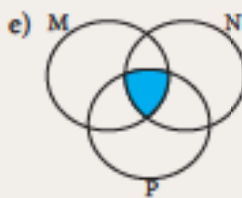
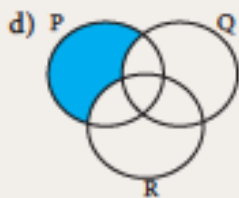
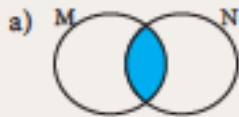
3. Na crtežu s Vennovim dijagramom dati su skupovi A , B i C .

Zapiši na tabelaran način skupove:

- $A, B \cap C$
- $B \cap C, A \cap B, B \cap \emptyset$
- $B \cup C, A \cup C$
- $A \setminus B, B \setminus C, A \setminus C$



4. Prikaži Vennovim dijagramom skupove: $A = \{1, 4, 5, 7\}$ i $B = \{2, 4, 7, 8, 9\}$.
5. Dati su skupovi: $M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, $N = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ i } 6 \leq x \leq 11\}$ i $P = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ i } 3 < x \leq 11\}$. Odredi:
- $M \cap N, N \cap P, P \cap M$
 - $M \cup N, N \cup P, P \cup M$
6. Šta predstavljaju elementi skupa $A \cap B$, ako je A skup svih djevojčica u tvom odjeljenju, a B skup svih sedmaka u školi?
7. Skupovi $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ i } x < 7\}$ i $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ i } x \text{ je broj iz prve desetice}\}$ prikaži tabelarno i Vennovim dijagramom. Zatim odredi razliku $A \setminus B, B \setminus A$.
8. Na crtežu su dati skupovi prikazani Vennovim dijagramom. Koje su operacije predstavljene obojenim dijelovima?

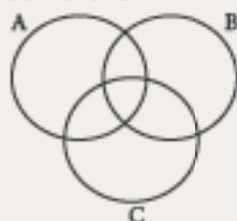


9. Precrtaj svaki dijagram u svesku, a zatim oboji dio koji odgovara sljedećim operacijama:

a) $A \cap B$



b) $A \cap B \cup C$



c) $(A \cup B) \setminus (B \cap A)$



d) $(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$



Svojstva operacija presjeka i unije skupova

Pri radu sa skupovima, važno je razumjeti i koristiti određena svojstva operacija unije i presjeka.

U ovoj lekciji naučit ćeš koja su osnovna svojstva ovih operacija, kao što su komutativno i asocijativno svojstvo. Ova svojstva će ti omogućiti da prepoznaješ i pojednostavljuješ izraze sa skupovima.

Kroz primjere i zadatke uočit ćeš kako ti ova svojstva pomažu u logičkom razmišljanju i rješavanju problema vezanih za skupove.

Primjer 1

U jednoj školi 20 učenika pohađa časove matematike (skup M), a 15 učenika pohađa časove informatike (skup L).

Od njih, 8 učenika pohađa i matematiku i informatiku.

Koliko učenika pohađa samo jedan predmet?



Rješenje:

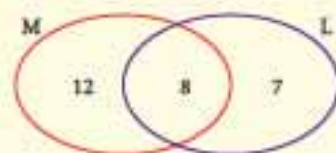
Da bismo odredili koliko učenika pohađa nastavu iz samo jednog predmeta (broj elemenata u skupu $(M \setminus L) \cup (L \setminus M)$), potrebno je da utvrdimo koliko elemenata će sadržavati unija skupova učenika koji pohađaju časove samo iz matematike i skupa učenika koji pohađaju časove samo iz informatike.

Kada od ukupnog broja učenika koji pohađaju časove iz matematike oduzmemo broj onih koji pohađaju oba predmeta, dobit ćemo koliko njih pohađa samo časove iz matematike, tj. $20 - 8 = 12$. To znači da 12 učenika pohađa samo časove iz matematike.

Kada od broja učenika koji pohađaju časove iz informatike oduzmemo broj onih koji pohađaju oba predmeta, dobit ćemo koliko učenika pohađa samo časove iz informatike, tj. $15 - 8 = 7$.

Broj elemenata unije bit će zbir broja elemenata u ova dva skupa (skupovi su disjunktni), odnosno: $20 - 8 + 15 - 8 = 19$ ($12 + 7 = 19$).

Dakle, ukupno 19 učenika pohađa nastavu samo iz jednog od dva predmeta.



Za presjek i uniju dva skupa važi komutativno svojstvo, odnosno ako su A i B dva data skupa, tada: $A \cap B = B \cap A$ i $A \cup B = B \cup A$.

Primjer 2

Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Odredi skupove:

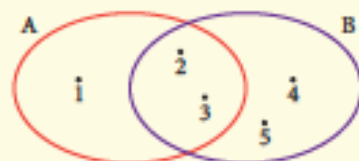
- a) $A \cap B$ i $B \cap A$ b) $A \cup B$ i $B \cup A$

Rješenje:

Za bolju preglednost koristimo Vennov dijagram.

- a) $A \cap B = \{2, 3\}$, $B \cap A = \{2, 3\}$. Budući da $\{2, 3\} = \{2, 3\}$, slijedi da $A \cap B = B \cap A$.

- b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Budući da $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, slijedi da $A \cup B = B \cup A$.



Za presjek i uniju skupova važi asocijativno svojstvo, odnosno ako su A, B i C tri data skupa, tada: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ i $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Primjer 3

Dati su skupovi: $M = \{11, 12, 13, 14, 15\}$, $N = \{13, 14, 15, 16\}$ i $P = \{13, 15, 17, 19\}$. Odredi i zapiši skupove:

- a) $(M \cap N) \cap P$ i $M \cap (N \cap P)$ b) $(M \cup N) \cup P$ i $M \cup (N \cup P)$

Rješenje:

Za veću preglednost, skupovi M , N i P su prikazani Vennovim dijagramom.



$$a) (M \cap N) \cap P = \{13, 14, 15\} \cap \{13, 15, 17, 19\} = \{13, 15\}$$

$$\text{i } M \cap (N \cap P) = \{11, 12, 13, 14, 15\} \cap \{13, 15\} = \{13, 15\}.$$

Dobijamo $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$.

$$b) (M \cup N) \cup P = \{11, 12, 13, 14, 15, 16\} \cup \{13, 15, 17, 19\} =$$

$$= \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19\} \text{ i}$$

$$M \cup (N \cup P) = \{11, 12, 13, 14, 15\} \cup \{13, 14, 15, 16, 17, 19\} = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19\}$$

Dobijamo $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$.

Zadatak 1

Dati su skupovi $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{b, c, d, e, f\}$. Provjeri da li je $A \setminus B = B \setminus A$.

Zadatak 2

Provjeri primjerima da li je $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

Primjer 4

Jedan restoran nudi tri vrste menija za doručak, i to:

meni A: $A = \{\text{omlet, tost, kafa}\}$; meni B: $B = \{\text{palačinke, kafa, sok}\}$

meni C: $C = \{\text{sendvič, kafa, jogurt}\}$

a) Pokaži da je unija menija komutativna, tj. da $A \cup B = B \cup A$.

b) Pokaži da je unija asocijativna, tj. da $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Rješenje:

a) Komutativno svojstvo unije

Nalazimo $A \cup B$, tj. sve obroke koji se pojavljuju barem u jednom od dva menija:

$$A \cup B = \{\text{omlet, tost, kafa, palačinke, sok}\}$$

$$B \cup A = \{\text{palačinke, sok, kafa, omlet, tost}\}.$$

Budući da skupovi sadrže iste elemente (redoslijed nije važan), zaključujemo: $A \cup B = B \cup A$.

b) Asocijativno svojstvo unije

Prvo nalazimo $(A \cup B) \cup C$: $A \cup B = \{\text{omlet, tost, kafa, palačinke, sok}\}$.

Sada određujemo uniju dobivenog skupa sa skupom C, odnosno: $(A \cup B) \cup C = \{\text{omlet, tost, kafa, palačinke, sok, sendvič, jogurt}\}$.

Zatim nalazimo $B \cup C = \{\text{palačinke, sok, kafa, sendvič, jogurt}\}$, pa uniju skupa A sa ovim skupom $B \cup C$, odnosno: $A \cup (B \cup C) = \{\text{omlet, tost, kafa, palačinke, sok, sendvič, jogurt}\}$.

Budući da su oba dobijena skupa ista, zaključujemo: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

To znači da, bez obzira kako grupišemo menije, konačna lista obroka koje restoran nudi se ne mijenja.

Primjer 4 nam pokazuje kako se svojstva unije mogu primijeniti u svakodnevnim situacijama, poput izbora menija, lista proizvoda u prodavnicama ili organiziranja različitih grupa predmeta.

Zadatak 3

U jednoj kompaniji postoje tri odjela koja koriste različite softvere za rad, i to:

odjel za finansije (F): Excel, SAP i QuickBooks;

odjel za ljudske resurse (H): SAP, BambooHR i Trello;

odjel za marketing (M): Trello, Google Ads i Canva.

- Provjeri komutativno i asocijativno svojstvo presjeka odjela (naprimjer, $F \cap H = H \cap F$).
- Provjeri asocijativno svojstvo unije odjela, odnosno $(F \cup H) \cup M = F \cup (H \cup M)$.
- Analiziraj praktično šta znače ova svojstva u vezi s kompanijom i njenom organizacijom.

Kompanija želi smanjiti troškove za softver i odlučuje da zadrži samo one programe koji se koriste u najmanje dva od tri odjela (finansije, ljudski resursi, marketing). Kako bi iskoristio svojstva presjeka i unije da odrediš listu softvera koji trebaju ostati u upotrebi? Da li će redoslijed grupiranja odjela utjecati na konačan izbor softvera? Objasni zašto.

Objasni u svojoj svesci:

- Zašto su presjek i unija komutativni?
- Zašto je unija asocijativna?
- Kako ova svojstva mogu pomoći u realnim situacijama?



Ako odgovoriš i objasniš sva tri pitanja – ti si majstor za skupove!



Ako imaš sumnje – vrati se na dijelove koji ti nisu jasni i pokušaj ponovo!

Samostalni rad

1. Dati su skupovi A, B, C:

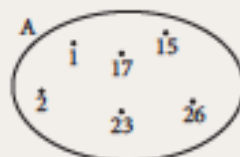
$$B = \{3, 6, 9, \dots\}$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ i } 3 \leq x \leq 12\} \text{ i } D = \emptyset.$$

Nadi jednake skupove pod a, b, c, d, e, f, g, h, i.

a) $A \cap B$ b) $A \cap C$ c) $B \cap C$ d) $C \cap A$ e) $C \cap B$

f) $B \cap A$ g) $C \cap C$ h) $A \cap D$ i) $D \cap D$



2. Dati su skupovi A, B, C i D:

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ i } x < 7\}, C = \{0, 2, 4, 6, 8\} \text{ i } D = \{1, 2, 5, 8\}$$

Pokaži da su tačne jednakosti:

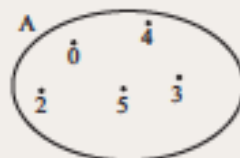
a) $A \cap B = B \cap A$ b) $A \cap C = C \cap A$ c) $B \cap C = C \cap B$

d) $D \cap B = B \cap D$ e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

f) $(B \cap D) \cap A = B \cap (D \cap A)$ g) $(C \cap B) \cap D = C \cap (B \cap D)$

h) $A \cap A = A$ i) $B \cap B = B$ j) $C \cap \emptyset = \emptyset$

Koja svojstva operacije presjeka su izražena jednakostima a, b, c, d, e, f, g?



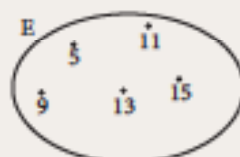
3. Dati su skupovi:
- $A = \{x \mid x \text{ je paran broj}\}$
- ,

$$B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}, C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$D = \{x \mid x \text{ je paran broj manji od } 10\}$$

a) $A \cup B$ b) $A \cup D$ c) $C \cup D$ d) $C \cup E$ e) $D \cup E$

f) $D \cup C$ g) $B \cup A$ h) $E \cup D$ i) $C \cup C$ j) $\{1, 2, 4\} \cup C$



4. Dati su skupovi:

$A = \{0, 3, 5, 7, 12, 14\}$ $B = \{x \mid x + 5 = 7 \text{ ili } x - 5 = 7\}$, C je skup prirodnih brojeva manjih od 5 i D je dat Vennovim dijagramom. Pokaži da su tačne jednakosti:

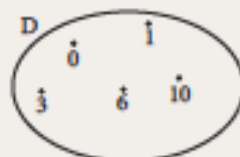
a) $A \cup B = B \cup A$ b) $B \cup C = C \cup B$ c) $B \cup D = D \cup B$

d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e) $B \cup (C \cup D) = (B \cup C) \cup D$

f) $(A \cup B) \cup (C \cup D) = (A \cup C) \cup (B \cup D)$ g) $A \cup A = A$

h) $B \cup B = B$ i) $C \cup \emptyset = C$ j) $A \cup (B \cup A) = A \cup B$

Koja svojstva operacije unije su izražena jednakostima a, b, c, d, e?



5. Jesu li tačne jednakosti? Obrazloži svoj odgovor.

a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \cap C$ b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus C) \setminus C$

c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap C) \setminus (A \cap C)$ d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- 6.* Dati su skupovi:
- $A = \{4\}$
- ,
- $B = \{\{4\}\}$
- . Odredi: a)
- $A \cap B$
- b)
- $M = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$

- 7.* Nadi uniju skupova:
- $A = \{x \mid x \in X, X \subset \{1\}\}$
- i
- $B = \{x \mid x \in \{1, 2\}\}$

Skup uređenih parova

U ovoj lekciji fokusiraćeš se na važne pojmove vezane za uređene parove i dvoelementne skupove.

Tokom lekcije naučićeš kako da razlikuješ uređene parove od dvoelementnih skupova i kako da odrediš skup od uređenih parova na datom skupu. Kroz interaktivne primjere i zadatke uvjerit ćeš se da pojmovi postaju jasni i primjenjivi.



Primjer 1

Dat je skup $M = \{1, 2, 3\}$. Zapiši sve dvoelementne podskupove skupa M .

Rješenje:

Dvo elementni podskupovi skupa M su: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ i $C = \{2, 3\}$.

Da li su skupovi $\{1, 2\}$ i $\{2, 1\}$ jednaki? Objasni zašto.

Zadatak 1

Maja ima ulaznicu za koncert na kojoj piše red 5, sjedište 12, a na Ilirskoj ulaznici piše red 12, sjedište 5. Da li Maja i Ilir imaju isto mjesto za sjedenje? Da li se za njihove ulaznice može zapisati $\{5, 12\}$ i $\{12, 5\}$? Objasni svoj odgovor.

Primjer 2

Razmisli o razlici između zapisa skupa $A = \{5, 12\}$ i zapisa koordinata tačke $B(5, 12)$. Objasni zašto zapisi nisu isti i navedi primjere za to.

Rješenje:

Zapis $A = \{5, 12\}$ je skup koji sadrži dva elementa: 5 i 12.

U skupu redoslijed nije važan, što znači da $\{5, 12\}$ je isto što i $\{12, 5\}$.

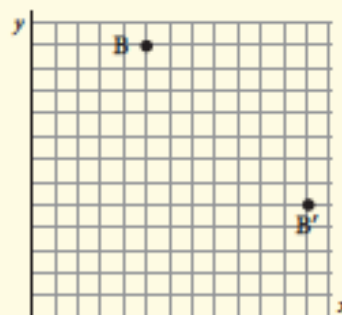
S druge strane, tačka $B(5, 12)$ označava poziciju (mjesto) u koordinatnoj ravni gdje je x -koordinata 5, a y -koordinata 12.

Tačka $B'(12, 5)$ označava poziciju u koordinatnoj ravni gdje je x -koordinata 12, a y -koordinata 5.

Dakle, tačke B i B' su različite. Jasno je da $\{5, 12\}$ i $(5, 12)$ nisu isti.

Za razliku od skupa, zapis $(5, 12) \neq (12, 5)$ jer zavisi od redoslijeda.

Za njega koristimo pojam uređeni par. Šta je uređeni par?



Uređeni par elemenata je par od dva elementa kod kojeg se tačno zna koji je prvi, a koji drugi element.

Uređeni par od dva elementa a i b , kod kojeg je a prvi, a b drugi element, označava se sa (a, b) . U tom zapisu a je prvi element ili prva komponenta, a b je drugi element ili druga komponenta.

Zadatak 2

Da li su uređeni parovi $(1, 2)$ i $(2, 1)$ jednaki? Objasni svoj odgovor. Kada bi dva uređena para bila jednaka?

Dva uređena para (a, b) i (c, d) jednaka su ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

U uređenom paru (a, b) dozvoljeno je da $a = b$, odnosno (a, a) je uređeni par.

Uređeni par (a, b) za $a \neq b$ nije isto što i skup $\{a, b\}$, a uređeni par (a, a) nije isto što i skup $\{a\}$ zato je (a, b) različito od (b, a) iako kao skupovi $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Zadatak 3

Zapiši primjere uređenih parova iz svakodnevnog života.

Primjer 3

Data su dva skupa: $A = \{2, 4, 6\}$ i $B = \{a, b\}$. Zapiši skup čiji su elementi svi uređeni parovi takvi da je prvi element svakog uređenog para iz skupa A , a drugi element iz skupa B .

Rješenje:

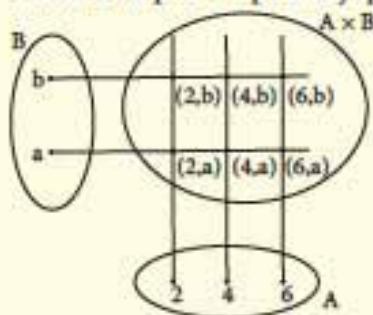
Svaki element iz skupa A uparujemo sa svakim elementom iz skupa B . Kada je prvi element 2, dobijamo uređene parove: $(2, a)$ i $(2, b)$, kada je prvi element 4, dobijamo: $(4, a)$ i $(4, b)$, a kada je prvi element 6, dobijamo sljedeće uređene parove: $(6, a)$ i $(6, b)$. Skup svih ovih uređenih parova je: $P = \{(2, a), (2, b), (4, a), (4, b), (6, a), (6, b)\}$.

Ovaj skup se označava sa $A \times B$ i zove se Dekartov proizvod skupova A i B .

Za zapis $P = \{(2, a), (2, b), (4, a), (4, b), (6, a), (6, b)\}$ kažemo da je tabelarni zapis Dekartovog proizvoda skupova A i B .

Za dva skupa A i B , skup svih uređenih parova kod kojih je prva komponenta iz skupa A , a druga iz skupa B , naziva se Dekartov proizvod skupa A sa skupom B i označava se sa $A \times B$. Opisno se zapisuje: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ i } y \in B\}$.

Često se skup $A \times B$ prikazuje pomoću Dekartove šeme, kao na crtežu:



Primjer 4

Dati je skup $A = \{1, 2, 3\}$. Odredi sve uređene parove koji se mogu sastaviti od elemenata ovog skupa.

Rješenje:

Da bismo sastavili uređene parove iz skupa A , kombinujemo elemente u parove, pri čemu je redoslijed elemenata važan.

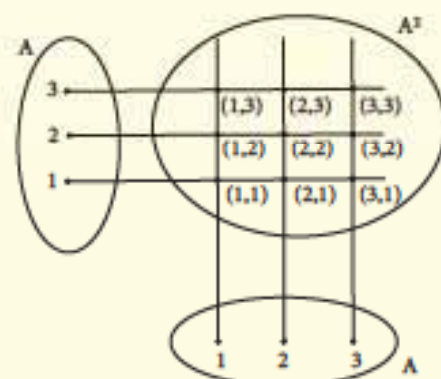
Uređeni parovi od elemenata 1, 2, 3 su: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$.

Dakle, skup uređenih parova P možemo zapisati kao:
 $P = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

Dekartov proizvod $A \times A$ se često naziva Dekartov kvadrat i označava se sa A^2 , odnosno:

$$A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ i } y \in A\}.$$

Dekartov kvadrat može se prikazati Dekartovom šemom kao na crtežu.



Zadatak 4

Dati su skupovi $K = \{21, 22, 23\}$ i $L = \{m, n, p, q\}$. Odredi Dekartov proizvod $K \times L$.
 a) tabelarno b) sa Dekartovom šemom..

Zadatak 5

Nađi $A \times \emptyset$ za proizvoljan skup A . Objasni svoj odgovor.

Zadatak 6

Dat je tabelarno Dekartov proizvod skupova A i B ,
 $A \times B = \{(7, 2), (7, 4), (7, 6), (9, 2), (9, 4), (9, 6)\}$. Odredi skupove A i B tabelarno.

Primjer 5

U okviru projekta održivog razvoja učenice sedmog razreda odlučile su napraviti plan za organizovanje lokalne izložbe ekoloških proizvoda. U tu svrhu, žele istražiti različite kategorije proizvoda i njihova svojstva, naprimjer:

skup proizvoda: $A = \{\text{hrana, odjeća, igračke}\}$.

skup materijala: $B = \{\text{plastika, drvo, tekstil}\}$.

Učenici treba da odrede $A \times B$ i prikažu ga Dekartovom šemom, radi dodatnog objašnjenja značenja uređenih parova u kontekstu ekološke svijesti.

Rješenje:

Za formiranje uređenih parova, učenici treba da kombinuju svaki tip proizvoda sa svakim materijalom.

Naprimjer, od uređeni parovi s hranom kao prvim elementom:

(hrana, plastika) – plastična ambalaža za pakovanje hrane;

(hrana, drvo) – drvene kutije za hranu;

(hrana, tekstil) – tekstilne vrećice za hranu.

Odjeća kao prvi element:

(odjeća, plastika) – izrada plastičnih tkanina;

(odjeća, drvo) – drveni modni ukrasi za odjeću;

(odjeća, tekstil) – odjeća od recikliranog tekstila.

Za igračke:

(igračke, plastika) – plastične igračke;

(igračke, drvo) – drvene igračke;

(igračke, tekstil) – tekstilne igračke.

Zapis Dekartovog proizvoda $A \times B$ je:

$A \times B = \{(\text{hrana, plastika}), (\text{hrana, drvo}), (\text{hrana, tekstil}), (\text{odjeća, plastika}), (\text{odjeća, drvo}), (\text{odjeća, tekstil}), (\text{igračke, plastika}), (\text{igračke, drvo}), (\text{igračke, tekstil})\}$.

Može se razmišljati o važnosti svakog para, npr. par (hrana, plastika) može se posmatrati kao problem jer je plastična ambalaža štetna za životnu sredinu. Šta možeš reći o paru (odjeća, tekstil) ili (igračke, drvo)?

Zadatak 7

U laboratoriji Mehmed razmatra različite kombinacije temperatura i vremena zagrijavanja vode.

On ima dva skupa:

Skup A: Temperature u stepenima Celzijusa $\{10^\circ\text{C}, 20^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}\}$ i

Skup B: Vremena zagrijavanja u minutama $\{5 \text{ min}, 10 \text{ min}, 15 \text{ min}\}$.

- Zapiši Dekartov proizvod skupa A sa skupom B.
- Koji parovi temperature i vremena daju najbolji rezultat za zagrijavanje vode? (više temperature i duže vrijeme zagrijavanja su povoljniji za bolje zagrijavanje vode)

Kako možeš primijeniti pojmove uređenih parova i Dekartovog proizvoda u stvarnom životu, posebno u situacijama gdje treba da kombinuješ različite opcije, kao što su izbor odjeće, planiranje obroka ili organizovanje događaja? Objasni kroz primjere moguće prednosti korištenja ovih matematičkih pojmova u svakodnevnim odlukama.

U svoju svesku nacrtaj krug. U krug upiši: „Moje znanje o uređenim parovima i Dekartovom proizvodu“.

Ocijeni svoj rad bojama:

- Zelena: osjećam da sam odlično razumio/la i mogu samostalno primjenjivati naučeno.
- Žuta: imam osnovno znanje, ali treba mi još malo vježbe.
- Crvena: nisam siguran/na u svoje znanje i treba da dodatno radim.

Lista pitanja: Ispod kruga zapiši 2–3 pitanja na koja želiš da nađeš odgovor ili teme koje želiš detaljnije istražiti.

Samostalni rad

- Dati su skupovi: $A = \{a, b\}$ i $B = \{a, 6, 7\}$. Prikaži tabelarno sljedeće Dekartove proizvode:
 - $A \times B$
 - $B \times A$
 - $A \times A$
 - $B \times B$
 - $(A \cap B) \times B$
 - $(B \setminus A) \times A$
 - $A \times (A \cup B)$
 - $A \times \emptyset$
- Iz kojih skupova su dobijeni sljedeći Dekartovi proizvodi:
 - $\{(2, 1), (2, 3), (5, 1), (5, 3)\}$
 - $\{(5, x), (x, 5), (5, 5), (x, x)\}$
- Dati su skupovi: $A = \{0, 2, 4\}$ i $B = \{3, 5\}$. Prikaži tabelarno, opisno i pomoću Dekartove šeme skupove: a) $B \times$ b) $A \times A$
- * Dati su skupovi: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ i } 0 < x < 4\}$ i $B = \{y \mid y \in \mathbb{N} \text{ i } 5 \leq y \leq 6\}$. Prikaži tabelarno i Dekartovom šemom skupove:
 - $P = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ i } x = y\}$, $M = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ i } x + y = 6\}$,
 $S = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ i } y - x = 2\}$
 - Odredi skupove: $M \cap S$, $M \setminus S$, $M \cup S$ i $M \setminus (P \cup S)$.
- Dati su skupovi: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{x \mid x \in A \text{ i } x + 2 = 4\}$.
 - Prikaži tabelarno i Dekartovom šemom skupove: $A \times B$, $B \times A$ i B^2 .
 - Da li je $A \times B = B \times A$? Obrazloži tvoj odgovor.
- Zapiši sve podskupove skupa $\{(a, 5), (7, x), (4, 0)\}$.
 - Nadi sve dvoelementne podskupove skupa $\{(1, x), (2, z), (y, x)\}$.

Cijeli brojevi. Upoređivanje i uređivanje

U svakodnevnom životu često koristiš brojeve kako bi izmjerio ili opisao različite količine. Prirodnim brojevima najčešće se broje predmeti, dok ti razlomci i decimalni brojevi pomažu da izraziš dijelove cjeline (na primjer, pola hljeba ili četvrtinu kilograma šećera).

Ipak, postoje situacije kada ti brojevi nisu dovoljni da opišeš pojave oko sebe. Na primjer, kada temperatura zimi padne ispod nule, kada neko duguje novac ili kada se izračunavaju promjene u visini iznad i ispod nivoa mora. U takvim slučajevima potrebni su brojevi koji mogu predstaviti gubitak, manjak ili „kretanje“ u suprotnom smjeru.

Tako se uvode cijeli brojevi, kojima možeš preciznije opisati i razumjeti različite pojmove u matematici i stvarnom životu.



Primjer 1

- Zapiši tabelarno skup cijelih brojeva.
- Odredi podskup iz Z čiji su elementi pozitivni cijeli brojevi.
- Odredi podskup iz Z čiji su elementi negativni cijeli brojevi.
- Kakva je veza između skupova N , N_0 , Z^+ , Z^- i Z ?

Rješenje:

- Elementi skupa cijelih brojeva su: prirodni brojevi, njihovi suprotni brojevi i nula, odnosno:

$$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$
- $Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $Z^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$
- Veze između N , N_0 , Z^+ , Z^- i Z mogu se prikazati i pomoću operacija među skupovima.
 Naprimjer, $Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$, $Z^+ = N$, $Z^+ \cup \{0\} = N_0$, $Z^+ \cap Z^- = \emptyset$, $Z \setminus Z^- = N_0$

Zadatak 1

Odredi skupove:

- $Z^+ \setminus N$; b) $Z^+ \cap N$; c) $Z^+ \cap Z^-$; d) $Z \setminus N$; e) $Z \cup \{0\} \cup Z^+$ g) $\{0\} \cup Z^+$.

Zadatak 2

Počevši od najmanjeg, poredaj brojeve: 11, -15, -34, 15, -11, 0, 20, -20 i prikaži ih na brojnoj pravoj.

Za $a, b \in \mathbb{Z}$ kažemo da je a veće od b (ili da je b manje od a) (poštujući zapis $a > b$ ili $b < a$) ako se tačka $A(a)$ nalazi desno od tačke $B(b)$ na brojnoj pravoj.

Primjer 2

Kako ćemo zapisati ako kažemo: „Temperatura je najmanje -3°C “?

Rješenje:

Ako kažemo „Temperatura je najmanje -3°C “, to znači da temperatura može biti -3°C ili više. Matematički, to se zapisuje kao: $T \geq -3$.

„Najmanje“ znači da je to najniža moguća vrijednost, ali može biti i veća.

Znak „ $\geq$ “ (veće ili jednako) koristimo zato što temperatura može biti -3°C ili bilo koja veća vrijednost (na primjer, 0°C , 5°C , 10°C i sl.).

Sličan primjer: Ako kažemo „Temperatura je najviše 10°C “, to znači da ona može biti 10°C ili manja, pa zapisujemo: $T \leq 10$.

Za $a, b \in \mathbb{Z}$, za koje važi $a = b$ ili $a > b$, pišemo $a \geq b$.

Za $a, b \in \mathbb{Z}$, za koje važi $a = b$ ili $a < b$, pišemo $a \leq b$.

Primjer 3

Iskoristi znakove $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ da zapišeš odnose između brojeva:

- a) 2 i 3 b) -4 i -3

Rješenje:

Tačno je da je $3 > 2$, ali isto tako tačno je i da je $3 \geq 2$ te $3 \geq 3$.

Slično, tačno je da je $-4 < -3$, ali i da je $-4 \leq -3$ te $-4 \leq -4$.

Zadatak 3

Na brojnoj pravoj:

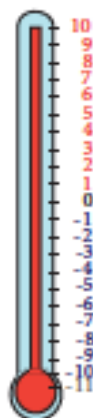
- Crvenom bojom označi tri tačke čije su koordinate manje ili jednake -3 .
 - Plavom bojom označi tri tačke čije koordinate nisu manje od 2.
 - Zelenom bojom označi tri tačke s koordinatama većim ili jednakim 2.
- Šta primjećuješ?

Primjer 5

Temperatura u različitim gradovima je:

- U Skoplju temperatura je 5°C .
- U Tirani temperatura je 2°C .
- U Podgorici temperatura je -3°C .
- U Sarajevu temperatura je -5°C .
- U Beogradu temperatura je 0°C .
- U Zagrebu temperatura je -3°C .
- U Atini temperatura je 5°C .

- a) Koji grad ima najvišu temperaturu?
- b) Koji grad ima najnižu temperaturu?
- c) Kolika je razlika u temperaturi između Skoplja i Sarajeva?
- d) Koliko gradova ima negativne temperature?
- e) Poredaj temperature svih gradova koristeći simbol $\leq$.
U kakvom redoslijedu si zapisao brojeve (rastući ili opadajući)?

**Rješenje:**

- a) Najviša temperatura je u Skoplju i u Atini, 5°C .
- b) Najniža temperatura je u Sarajevu, -5°C .
- c) Razlika u temperaturi je 10°C . Objasni zašto.
- d) Negativne temperature imaju Podgorica (-3°C), Sarajevo (-5°C) i Zagreb (-3°C).
- e) Temperature su poredane u rastućem redoslijedu: $-5 \leq -3 \leq -3 \leq 0 \leq 2 \leq 5 \leq 5$.

Zadatak 4

Marko i njegovi prijatelji dogovaraju se da sakupe novac za opremu za sport. Svako od njih ima različan iznos duga i prihoda:

- Marko ima dug od 50 dinara, prihod od 100 dinara.
- Ana ima dug od 30 dinara, prihod od 80 dinara.
- Nikola ima dug od 20 dinara, prihod od 120 dinara.
- Tea ima dug od 40 dinara, prihod od 90 dinara.
- Fatima ima dug od 10 dinara, prihod od 70 dinara.

- a) Koristeći cijele brojeve, zapiši dug i prihod Marka i svakog od njegovih prijatelja. Uredi dobijene cijele brojeve u opadajućem redoslijedu.
- b) Ko od njih duguje najviše?
- c) Ko od njih ima najveći prihod?
- d) Ko od njih ima najveću razliku između prihoda i duga?
- e) Zapiši kao negativan cijeli broj ukupni dug svih prijatelja.

Kako bi se mogli koristiti cijeli brojevi u svakodnevnom životu? Možeš li navesti primjere iz svog današnjeg dana gdje si se susreo sa pozitivnim i negativnim cijelim brojevima, te poređenjem cijelih brojeva?

U svoju svesku odgovori na sljedeća pitanja:

1. Da li razumijem šta su cijeli brojevi i kako se dijele na pozitivne, negativne i nulu? Da / Ne
2. Mogu li samostalno zapisati pozitivne i negativne cijele brojeve? Da / Ne
3. Mogu li navesti primjere iz svakodnevnog života u kojima se koriste cijeli brojevi? Da / Ne
4. Mogu li objasniti vezu između skupova N , N_0 , Z^+ , Z^- i Z ? Da / Ne
5. Nakon odgovora na pitanja, napiši u svoju svesku kratak komentar o tome šta ti je najteže ili šta ti ide najbolje.

Samostalni rad

1. Zapiši 12°C iznad nule i 15°C ispod nule.
2. Odredi skupove:
a) $Z^+ \setminus Z$ b) $Z^+ \cap Z$ c) $Z^- \cap Z^-$ d) $Z \setminus N$ e) $Z \setminus ((0) \cup Z^+)$ f) $(0) \cup Z^+$
3. Temperatura izmjerena jednog ljetnog dana bila je 32°C , a zatim se promijenila za 3°C . Kolika je bila temperatura kasnije? Objasni odgovor koristeći brojnu pravu. Razmisli – koliko rješenja ima ovaj zadatak?
4. Brojeve: 2, -5, -1, 0, 9, -100 poredaj po veličini, počevši od najmanjeg broja.
5. Koristeći simbole $\in$ i $\notin$, zapiši elemente iz skupa $\{2; -1; 3\frac{1}{2}; 0; -55; 3, 01; \frac{4}{2}\}$ koji pripadaju, odnosno ne pripadaju Z .
6. Dat je skup $A = \{2, -6, 8, 12, 0, -10\}$. Zapiši tabelarno skupove:
 $B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \text{ nije ni pozitivan ni negativan cijeli broj}\}$
 $C = \{x \mid x \in A \text{ i } x \text{ je negativan cijeli broj}\}$
7. Koja od tvrdnji je tačna?
a) $N_0 \subset Z$ b) $Z^- \cap Z^+ = \{0\}$
8. U tabeli su predstavljene temperature izmjerene u nekoliko gradova u Republici Sjevernoj Makedoniji. U kojim gradovima je temperatura izražena pozitivnim cijelim brojevima, a u kojim negativnim?

Temperatura po gradovima

Gradovi	Temperatura
Skoplje	3°C
Bitola	-6°C
Ohrid	5°C
Veles	0°C
Strumica	7°C
Prilep	-4°C

9. Pomoću znakova + i – zapiši:
 - a) temperaturu od 11°C ispod nule
 - b) temperaturu od 7°C iznad nule
 - c) gubitak od 5000 eura
10. Šta je tačno?
 - a) $3 \in \mathbb{N}_0$
 - b) $0 \in \mathbb{Z}^-$
 - c) $-22 \in \mathbb{Z}$
 - d) $0 \in \mathbb{N}$
11. Odredi rezultat datih operacija koristeći skupove $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\emptyset$.
 - a) $\mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$
 - b) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}^-$
 - c) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^-$
12. Temperatura izmjerena jučer u 13h bila je -3°C , a danas -5°C . Kada je temperatura niža?
13. Pomoću brojevnice usporedi brojeve:
 - a) 2 i 5
 - b) 4 i 0
 - c) -5 i 0
 - d) 2 i -6
 - e) -1 i -2
14. Prepiši zadatak u svoju svesku i zaokruži šta je tačno:
 - a) $-116 < +4$
 - b) $0 > 433$
 - c) $-34 > 0$
 - d) $-200 < -199$
15. Poredaj po veličini brojeve: -4, 0, -49, 32, 15, -5 i -50, počevši od najvećeg.
16. Dat je skup $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ i } -4 < x < 1\}$. Zapiši tabelarno skupove: $B = \{x \mid x \in A \text{ i } x < -1\}$ i $C = \{x \mid x \in A \text{ i } x \geq -2\}$.
17. Temperatura se promijenila od -10°C na -4°C . Koja je temperatura viša?
18. Poredaj po veličini brojeve počevši od najmanjeg: -15, 45, 13, 0, -34, -31 i 14
19. Usporedi brojeve koristeći znakove < ili >:
 - a) 0 i -234
 - b) -99 i -100
 - c) -14 i +13
 - d) +21 i -30

Apsolutna vrijednost

U ovoj lekciji upoznat ćemo se s pojmom apsolutna vrijednost, koja predstavlja udaljenost nekog broja od nule na brojevnoj pravci, bez obzira na smjer.

Ovaj koncept je od ključnog značaja za razumijevanje razlika između pozitivnih i negativnih brojeva, i igra važnu ulogu u rješavanju različitih matematičkih problema.

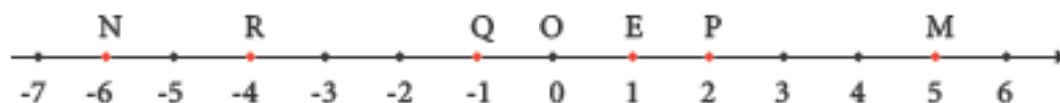


Podsjeti se:

1. Prava p s izabranim tačkama O i E , odnosno jedinačnom duži OE , zajedno s pojmovima „lijevo“ i „desno“ (O je lijevo od E , a E je desno od O), na kojoj se prenošenjem jedinačne duži lijevo i desno od tačke O označava beskonačno mnogo tačaka (nazvanih cijelobrojne tačke) kojima su pridruženi cijeli brojevi (kao na crtežu u primjeru 1), naziva se brojeva prava (brojeva osa).
2. Izborom tačaka O i E , brojeva prava dobija smjer. Smjer od O prema E , odnosno smjer udesno, naziva se pozitivan smjer. Suprotni smjer, ulijevo, naziva se negativan smjer. Na polupravi OE nalaze se pozitivni cijeli brojevi, dok se na njenoj suprotnoj polupravi nalaze negativni cijeli brojevi.
3. Za svaku cijelobrojnu tačku H , cijeli broj a koji je pridružen toj tački naziva se koordinata te tačke i označava se $H(a)$. Brojeva prava se naziva i koordinatna osa, a tačka O se naziva koordinatni početak.

Primjer 1

- a) Na crtežu su date tačke M, N, P, Q i R . Koje su njihove koordinate?



- b) Za svaku od tačaka M, N, P, Q i R zapiši s koje strane od tačke O se nalazi i na kojoj udaljenosti.

Rješenje:

- a) Tačka M ima koordinatu 5, odnosno $M(5)$. Zatim $N(-6)$, $P(2)$, $Q(-1)$ i $R(-4)$.
- b) Tačka M se nalazi s desne strane tačke O i udaljena je 5 jedinačnih duži.
Tačka N se nalazi lijevo od tačke O i udaljena je 6 jediničnih dužina.
Nastavi zapisivati u svoju svesku za tačke P, Q i R .

Neka $A(a)$ bude tačka na brojevnoj pravoj. Tada:

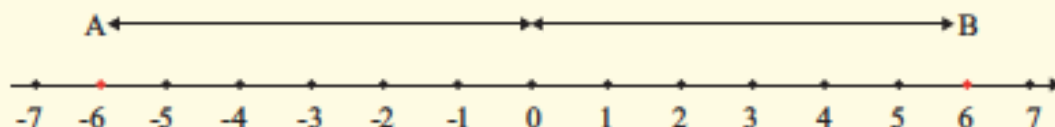
1. Ako je a pozitivan cijeli broj, tj. $a = n$, tada je tačka A desno od O , a njeno rastojanje od O je jednako n jediničnih odsjeka;
2. Ako je a negativan cijeli broj, tj. $a = -n$, tada je tačka A lijevo od O , a njeno rastojanje od O je jednako n jediničnih odsjeka;
3. Ako je $a = 0$, tada se tačka A poklapa sa tačkom O .

Primjer 2

Razmotrimo tačke $A(-6)$ i $B(6)$ na brojevnoj pravoj na crtežu. Šta primjećuješ?

Rješenje:

One su simetrične u odnosu na tačku O , a njihove koordinate su suprotni cijeli brojevi 6 i -6 . Također, one su jednako udaljene od tačke O , ali jedna je na desnoj, a druga na lijevoj strani tačke O .



Rastojanje svake cijelobrojne tačke $A(a)$ sa koordinatom do koordinatnog početka O , bez obzira na to da li se tačka A nalazi desno ili lijevo od tačke O , naziva se apsolutna vrijednost (ili modul) cijelog broja a i označava se sa $|a|$.

Naprimjer:

$$|-35| = 35; |135| = 135; |-453| = 453; |0| = 0; |47| = 47.$$

Zadatak 1

Nadi apsolutne vrijednosti brojeva: $11, -15, -34, 15, -11, 20$ i -20 .

Za apsolutne vrijednosti cijelih brojeva važe sljedeća svojstva:

Za svaki cijeli broj:

1. $|-a| = |a|$;
2. $|a| = 0$ ako i samo ako $a = 0$;
3. $|a| \in \mathbb{N}_0$

Zadatak 2

Nadi sve cijele brojeve a za koje važi: a) $|-a| = 3$; $|a| = 8$; $|a| = 0$.

Zadatak 3

Neka $a, b \in \mathbb{Z}$. Provjeri tačnost tvrdnji i objasni svoj odgovor:

- Ako $|a| > |b|$, onda $a > b$.
- Ako $a > b$, onda $|a| > |b|$.
- Ako $a < b$, onda $|a| < |b|$.

Zadatak 4

Date su tvrdnje:

- Svaki negativan cijeli broj je manji od nule, a nula je manja od svakog pozitivnog cijelog broja.
- Svaki negativan cijeli broj je manji od svakog pozitivnog cijelog broja.
- Ne postoji najmanji cijeli broj i ne postoji najveći cijeli broj.
- Najmanji pozitivan broj je -1 , a najveći negativni cijeli broj je 1 .
- Između bilo koja dva cijela broja ili nema cijeli broj, ili postoji konačan broj cijelih brojeva.
- Za svaki dva različita cijela broja, jedan od njih je veći ili manji od drugog.
- Od dva pozitivna broja veći je onaj koji ima veću apsolutnu vrijednost, a od dva negativna broja manji je onaj koji ima veću apsolutnu vrijednost.
- Apsolutna vrijednost svakog cijelog broja je broj veći ili jednak nuli.
- Jedan broj je pozitivan ako je manji od nule, a negativan ako je veći od nule.
 - Koje tvrdnje su tačne?
 - Netačne tvrdnje napiši tako da postanu tačne.

Primjer 3

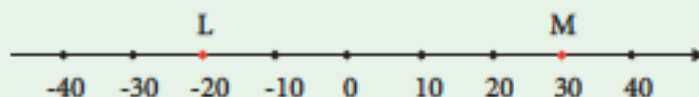
Marija i Luka su učesnici u takmičenju za prikupljanje novca za humanitarnu organizaciju.

Marija je skupila 50 eura, ali je imala troškove od 20 eura za materijale. Luka, s druge strane, uspio je da skupi 30 eura, ali je imao troškove od 50 eura.

- Koji od njih ima bolji krajnji rezultat?
- Kakva je apsolutna vrijednost svakog od rezultata?

Rješenje:

- Ako je Marija skupila 50 eura i potrošila 20 eura za materijale, onda je ostalo 30 eura, što znači da ima pozitivan rezultat, +30 eura. Ako je Luka skupio 30 eura, a potrošio 50 eura, onda će on imati negativan rezultat, -20 eura. Na brojevnoj pravoj rezultati će izgledati ovako:



- Apsolutna vrijednost krajnjeg rezultata Marije je $|30| = 30$. Apsolutna vrijednost krajnjeg rezultata Luke je $|-20| = 20$.

Zadatak 5

Zamislite da živite u gradu gdje zimske temperature mogu biti veoma niske. Naprimjer: 1. januara temperatura je -5°C , a 2. januara temperatura je 3°C .

Koliko je rastojanje od nule u temperaturi u ova dva dana?

Kako možeš primijeniti koncepte apsolutne vrijednosti i poretka cijelih brojeva u stvarnom životu? Možeš li dati primjere iz različitih oblasti, kao što su sport, ekonomija ili nauka, gdje ti ovi koncepti mogu pomoći da doneseš odluke ili da razumiješ podatke? Istraži.

I. Koristi skalu od 1 do 5 da se ocijeniš:

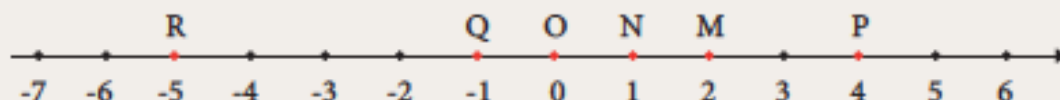
- 1: Ne razumijem uopšte.
- 2: Razumijem malo, ali imam mnogo pitanja.
- 3: Razumijem osnovne koncepte, ali se ne osjećam sigurno.
- 4: Razumijem dobro, ali mogu naučiti više.
- 5: Razumio/la sam sve i osjećam se sigurno.

II. U svoju svesku odgovori na sljedeća pitanja:

1. Koje su tri stvari koje sam naučio/la iz lekcije?
2. Jesam li uspio/la primijeniti koncepte apsolutne vrijednosti i poretka cijelih brojeva?
3. Mogu li dati primjere?
4. Šta je za mene najteži dio koji sam naučio/la iz ove lekcije i zašto?
5. Koji dio lekcije bih želio/la da razjasnimo ili ponovimo?

Samostalni rad

1. Na brojnoj pravoj odredi tačke: $A(2)$, $B(-2)$, $C(4)$, $D(-6)$ i $E(5)$.
2. Da li svakom pozitivnom i svakom negativnom cijelom broju odgovara tačka na brojnoj pravci? Objasni svoj odgovor.
3. Na crtežu su označene tačke M, N, P, Q i R. Koje su njihove koordinate?

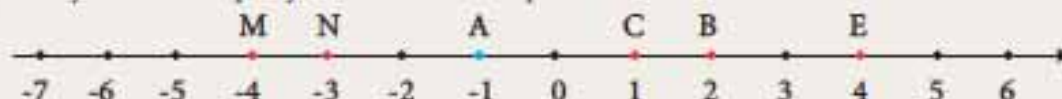


4. Odredi koordinate tačaka A, B, C, D i E na datoj brojnoj pravoj.



5. Neka su sa $K(-5)$, $N(-3)$, $G(+3)$ i $D(0)$ označene temperature u Kavadarcima, Negotinu, Gevgeliji i Delčevu, izmjerene u jednom zimskom danu. Nacrtaj brojnu pravu, a zatim prikaži rezultate mjerenja temperature.

6. U koju tačku će se pomjeriti tačka A ako se prenese:



- a) dvije jedinice ulijevo? b) tri jedinice udesno?
7. Koristeći brojnu pravu zapiši tri uzastopna cijela broja koja se nalaze:
a) lijevo od -2 b) desno od -1
8. Date su tačke $M(-3)$, $N(2)$ i $P(4)$. Nadi koordinate tačaka E i F koje su sredine odsječaka MN i NP, redom, a zatim dužinu duži EF.
9. Neka se tačka A nalazi dvije jedinice desno od -1 na brojnoj pravoj. Odredi tačku B koja je na rastojanju 3 jedinice od tačke A. Koje koordinate može imati tačka B?
10. Tačka $M(-1)$ je sredina duži AB. Nadi koordinatu tačke A ako je $B(2)$. Odredi koordinatu tačke A.

11. Popuni tabele:

a)

a	3	-5	10	-3	-12	0	14
$-a$							

b)

a	3	-5	10	-3	-12	0	14
$ a $							

12. Nadi sve cijele brojeve a za koje:

a) $|-a| = 3$ b) $|a| = 8$ c) $|a| = 0$

13. Neka je $x \in \mathbb{Z}$. Kakav broj je:

- a) $-x$, ako je x negativan broj? b) x , ako je $-x$ pozitivan broj?
c) $|x|$, ako je x pozitivan broj?

- 14.* Riješi jednačinu $|x| = 10$.

Sabiranje cijelih brojeva sa istim ili različitim znacima

U svakodnevnom životu često se susrećeš s pozitivnim i negativnim brojevima. Temperature mogu biti iznad ili ispod nule, finansijske transakcije mogu uključivati dobitke ili gubitke, a nadmorske visine mogu biti iznad ili ispod nivoa mora. Računanje s cijelim brojevima stalno je prisutno u našem svakodnevnom životu. Da bi pravilno izračunao ovakve vrijednosti, potrebno je da znaš kako sabirati cijele brojeve, bez obzira imaju li isti ili različit znak. U ovoj lekciji ćeš naučiti kako sabirati cijele brojeve, koja pravila treba da slijediš i kako da ih primijeniš u stvarnim situacijama. Vježbanjem i analizom primjera steći ćeš sigurnost u radu s pozitivnim i negativnim brojevima.



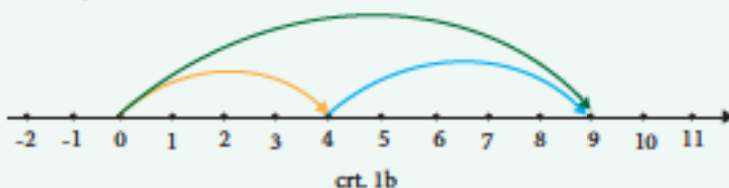
Primjer 1

Temperatura vazduha u 7 sati bila je 4°C iznad nule. Kolika je temperatura u 14 sati ako se ona povećala za 5°C ?

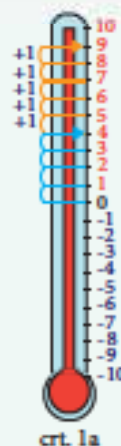
Rješenje:

Rješenje zadatka dato je crtežima (crt. 1a, 1b).

Prikazano na brojnoj pravoj, to bi izgledalo isto kao i na termometru: da bismo predstavili broj $+4$ na brojnoj pravoj, pomjeramo se udesno (u pozitivnom smjeru) 4 jedinične duži, a za broj $+5$ još 5 jediničnih duži udesno (temperatura se povećava, crt. 1b).



Iz crteža se vidi da $(+4) + (+5) = +9 = +(4+5) = +9$.



Zadatak 1

Izračunaj:

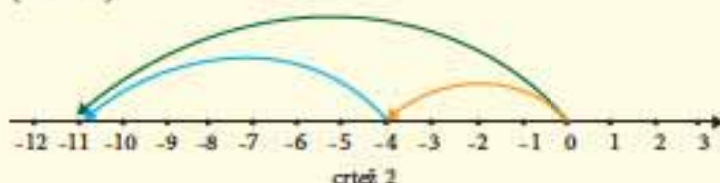
- a) $(+73) + (+29)$ b) $(+247) + (+113) + (+310)$

Primjer 2

U jednom zimskom danu temperatura vazduha u podne bila je 4°C ispod nule, a do 19 sati se spustila za još 7°C . Koliko stepeni je bila temperatura u 19 sati?

Rješenje:

Temperatura vazduha u podne bila je 4°C ispod nule (negativan broj -4°C), a zatim se spustila za još 7°C (ponovo negativna vrijednost -7°C). To znači da će u 19 sati biti hladnije, odnosno temperatura u 19 sati će biti niža od temperature u podne i iznositi će 11°C ispod nule, odnosno -11°C . Možemo reći da smo sabrali dva negativna cijela broja. Pri tome, kao rezultat tog zbira ponovo smo dobili negativan cijeli broj. I ovaj primjer može se prikazati na brojnoj pravoj (crtež. 2).



Iz brojne prave se vidi da se najprije pomjeramo 4 jedinične duži ulijevo (u negativnom smjeru), a zatim, da bismo dodali broj -7 , još 7 jediničnih duži ulijevo (ponovo u negativnom smjeru brojne prave, kao na crtežu 2, odakle se vidi da $(-7) + (-4) = -(7 + 4) = -11$.

Iz primjera 1 i 2 možemo zaključiti:

Zbir dva cijela broja istih znakova (oba pozitivna ili oba negativna) je cijeli broj čija je apsolutna vrijednost zbir apsolutnih vrijednosti ta dva broja (kao zbir prirodnih brojeva), sa istim znakom (pozitivnim ili negativnim) kao znakovi sabiraka.

Zadatak 2

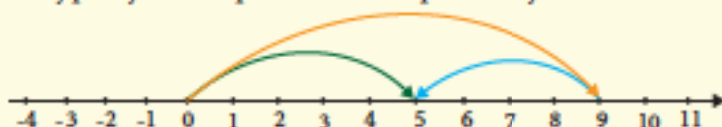
Izračunaj: a) $(+5970) + (+3730)$ b) $(-6100) + (-1370) + (-2806)$

Primjer 3

- Temperatura vazduha u podne iznosila je 9°C iznad nule. Do 20 sati se spustila za 4°C . Kolika je temperatura u 20 sati?
- Temperatura vazduha u podne iznosila je 9°C iznad nule. Do 20 sati navečer se spustila za 12°C . Kolika je temperatura u 20 sati?

Rješenje:

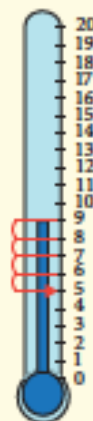
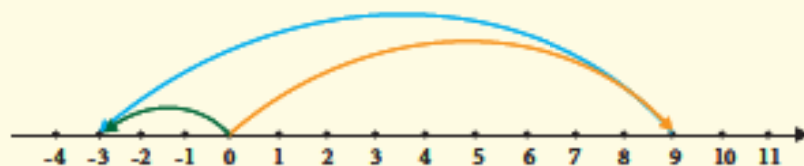
a) I ovaj primjer, kao i prethodna dva, prikazan je crtežima.



Koristeći crteže sa termometrom i brojne prave, objasni rješenje:

$(+9) + (-4) = +(9 - 4) = +5 = 5$. Razlika u zagradi $9 - 4 \in \mathbb{N}$, jer, kako se primjećuje i sa brojne prave, to su zapravo rastojanja od jedne do druge tačke (broja), odnosno apsolutne vrijednosti. Pri tome se mijenja samo smjer kretanja u zavisnosti od znaka broja (pozitivan ili negativan broj).

- b) Rješenje ćemo prikazati samo pomoću brojne prave. Najprije predstavljamo prvi sabirak, odnosno pomjeramo se 9 jediničnih duži udesno za temperaturu $+9$, a zatim 12 jediničnih duži ulijevo. Tako $(+9) + (-12) = -(12 - 9) = -3$. Razlika $12 - 9 \in \mathbb{N}$. Zašto?



Zadatak 3

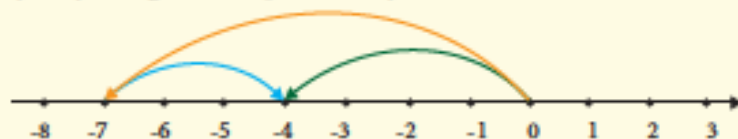
Izračunaj: a) $(+85) + (-30)$ b) $(+497) + (-589)$

Primjer 4

- a) Temperatura vazduha u jednom zimskom danu ujutro iznosila je 7°C ispod nule. Kolika je temperatura u podne istog dana ako se ona povećala za 3°C ?
- b) Temperatura vazduha u jednom zimskom danu ujutro iznosila je 7°C ispod nule. Kolika je temperatura u podne istog dana ako se ona povećala za 11°C ?

Rješenje:

- a) Rješenje ovog zadatka prikazano je na crtežu.

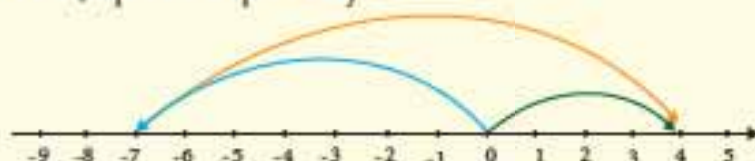


Počevši od nule, na brojnoj osi nanosimo ulijevo 7 jediničnih duži jer je temperatura ujutro bila 7°C ispod nule, a zatim nanosimo udesno 3 jediničnih duži jer se temperatura povećala za 3°C .

Na ovaj način dobijamo da je temperatura u podne iznosila 4°C ispod nule. Ovo se može zapisati i na sljedeći način: $(-7) + (+3) = -(7 - 3) = -4$.

Razlika $7 - 3 \in \mathbb{N}$. Objasni zašto?

- b) I u ovom slučaju rješenje je prikazano na brojnoj pravoj. Najprije se pomjeramo 7 jediničnih duži ulijevo (za temperaturu $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$), a zatim 11 jedinica udesno (za povećanje temperature od $11\text{ }^{\circ}\text{C}$). Tako se dobija $(-7) + (+11) = +(11 - 7) = +4$. Znači, u podne temperatura je bila $+4\text{ }^{\circ}\text{C}$.



Rješavanjem primjera 3 i 4 može se zaključiti:

Zbir dva različita broja sa različitim znacima (pozitivan i negativan ili negativan i pozitivan) je cijeli broj čija je apsolutna vrijednost jednaka razlici (kao prirodnih brojeva) veće i manje apsolutne vrijednosti tih brojeva, a njegov znak jednak je znaku broja sa većom apsolutnom vrijednošću.

Zbir bilo kojeg cijelog broja sa 0 i 0 sa bilo kojim cijelim brojem je sam taj cijeli broj.

$0 + a = a + 0 = a$, $a + (-a) = (-a) + a = 0$, gdje je a element skupa Z i tako dalje. Zbir bilo kojeg cijelog broja sa njegovim suprotnim brojem je nula.

Zadatak 4

Popuni tabelu:

a	26	-65	-182	200	1670	0	34
b	-12	19	243	-497	0	-195	-34
a+b							

Zadatak 5

Temperatura u 14 sati bila je $6\text{ }^{\circ}\text{C}$ iznad nule. Ako se do 19 sati spustila za $6\text{ }^{\circ}\text{C}$, kolika je bila temperatura u 19 sati? Objasni svoj odgovor koristeći brojnu pravu i kao zbir dva cijela broja. Šta možeš zaključiti?

Znak sabiraka	Znak zbira	Operacija između apsolutnih vrijednosti brojeva	Primjer
$\oplus + \oplus = \oplus$	+	sabiranje	$(+6) + (+4) = +10$
$\ominus + \ominus = \ominus$	-	sabiranje	$(-4) + (-6) = -10$
$\oplus + \ominus = \oplus$	+	Stavlja se znak sabirka sa većom apsolutnom vrijednošću oduzimanje	$(+6) + (-4) = +2$
$\ominus + \oplus = \ominus$	-	oduzimanje	$(+4) + (-6) = -2$

Primjer 5

- a) Anita ima negativno stanje na svojoj platnoj kartici od 1200 denara. Dobila je priliv sredstava od 5700 denara. Koje je stanje kartice nakon priliva sredstava?
- b) Miloš ima negativno stanje od 1000 denara, ali kupuje na internetu i pravi dodatni odljev sredstava od još 280 denara. Koje je stanje kartice Miloša nakon kupovine na internetu?
- c) Da li Anita i Miloš zajedno imaju dovoljno novca da kupe poklon od 3300 denara koji su izabrali za svog prijatelja Ilira?

Rješenje:

- a) Zbog negativnog stanja na kartici Anite, početno stanje je -1200 denara. Nakon priliva od 5700 denara $(+5700)$, stanje kartice je sljedeće:

$$(-1200) + (+5700) = +4500.$$
- b) Miloš ima negativno stanje od 1000 denara i na to dodaje još trošak od 280 denara, znači stanje njegove kartice je:

$$(-1000) + (-280) = -1280 \text{ denara.}$$
- c) Da bi kupili poklon, potrebno im je 3300 denara, ali oni zajedno imaju:

$$(+4500) + (-1280) = +3220, \text{ što nije dovoljno za kupovinu tog poklona.}$$
 Da li bi Anita i Miloš imali dovoljno novca da kupe izabrani poklon ako Miloš prethodno nije kupovao na internetu?

Zadatak 6

Zbog loših prehrambenih navika i neodgovarajućih dijeta, Pece je imao 6 kilograma manje od svoje uobičajene tjelesne mase. Želio je da poboljša svoje opšte fizičko stanje i da se vrati na svoju uobičajenu tjelesnu masu. Uz pravilnu i zdravu ishranu uspio je povećati svoju tjelesnu masu za 7 kilograma. Kakvo je konačno stanje sa tjelesnom masom Pecea?

Zadatak 7

Merita se kreće liftom u neboderu.

- a) Ona se nalazi na podzemnom parkingu na spratu označenom sa -2 i kreće se liftom 6 spratova prema gore. Na koji sprat će stići Merita liftom?
- b) Ako sa 4. sprata želi da se spusti u podzemni parking na spratu označenom sa -3 , koliko spratova treba da se spusti? Kako se ova situacija predstavlja zbirom cijelih brojeva?

Kako se mijenja zbir ako umjesto da sabiraš samo pozitivne brojeve, dodaš i negativne?
 Kako to utiče na konačan zbir?

U svoju svesku:

1. Zapiši tri stvari koje si naučio/la o sabiranju cijelih brojeva sa istim ili različitim znacima.
2. Napiši jedan primjer iz svakodnevnog života gdje možeš primijeniti naučeno.
3. Na skali od 1 do 5, ocijeni kako se osjećaš: samouvjeren/a u svoje razumijevanje lekcije (1 – uopšte ne razumijem, 5 – potpuno razumijem).
4. Zapiši jedno pitanje koje ti nije jasno ili o kojem bi želio/la da saznaš više.

Samostalni rad

1. Pomoću brojne prave izračunaj zbirove:

- a) $(+2) + (+3)$ b) $(-4) + (-2)$ c) $(+3) + (-7)$ d) $(-5) + (+4)$
e) $(+23) + (+32)$ f) $(+17) + 0$ g) $(-140) + (-8)$ h) $0 + (-54)$
i) $(-18) + (+23)$ j) $(+2) + (-2)$ j) $(+51) + (-68)$ k) $(-153) + (+153)$

2. Prikaži broj $+15$ kao zbir tri pozitivna broja.

3. Prikaži broj -24 kao zbir dva negativna cijela broja.

4. Broj -11 zapiši kao zbir dva cijela broja sa različitim znacima.

5. Broj $+6$ zapiši kao zbir dva cijela broja sa različitim znacima.

6. Izračunaj:

- a) $(-45) + (-13) + (-23)$ b) $(+12) + ((+99) + (+1))$ c) $(+41) + (+23) + (+87)$
d) $(-14) + (-21) + (-10) + (-15)$ e) $(+22) + (-43) + (+1)$ f) $(+16) + (-31) + (+2)$
g) $(-43) + (+41) + (+5)$ h) $(+7) + (-71) + (+15)$

7. Mirko duguje 60 denara Ani, a Petru 90 denara. Koliko ukupno denara duguje Mirko? Zapiši Mirkin dug kao brojni izraz sa cijelim brojevima.

8. Biljana je imala 1000 denara na tekućem računu. Potrošila je 1200 denara, a nakon nekog vremena uplatila je na svoj tekući račun 3000 denara. Koliko denara ima sada Biljana?

9. Koji broj će se dobiti ako zbir brojeva -45 i $+57$ saberemo sa zbirom brojeva -2 i -16 ?

10. Jedne večeri temperatura vazduha bila je -11°C , a tokom noći se smanjila za 5°C . Kolika je bila temperatura nakon smanjenja?

Svojstva operacije sabiranja cijelih brojeva

Sabiranje je jedna od osnovnih matematičkih operacija i igra ključnu ulogu u svakodnevnom životu. Od kupovine proizvoda u prodavnici do mjerenja vremena ili količine, sabiranje pomaže da organizuješ i upravljaš svojim resursima.

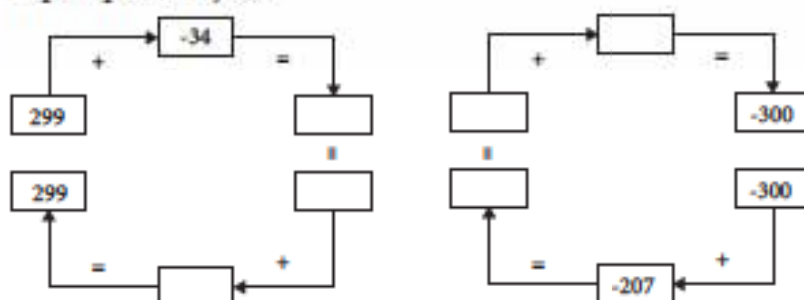
U ovoj lekciji naučit ćeš o svojstvima sabiranja, kao što su komutativno i asocijativno svojstvo, i istražiti ćeš kako ona utiču na način na koji rješavaš matematičke probleme.

Kroz praktične primjere i aktivnosti primijenit ćeš ova svojstva i razumjeti kako da ih iskoristiš u različitim situacijama.



Primjer 1

Popuni prazna mjesta.



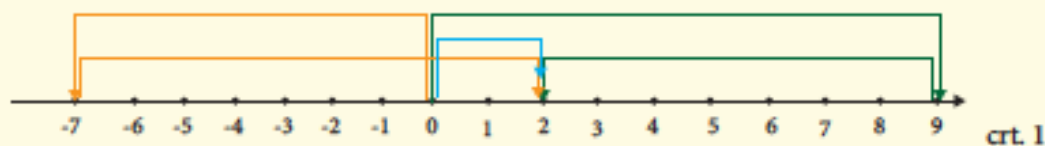
Uputstvo: Da bi popunio/popisala prazna polja na dijagramima, ako je potrebno, podsjeti se kako se sabiraju cijeli brojevi sa istim ili različitim znacima iz prethodne lekcije.

Primjer 2

Izračunaj zbirove: $9 + (-7)$ i $(-7) + 9$.

Rješenje:

Koristeći brojnu osu na crt. 1, na kome su označena oba zbira $9 + (-7)$ i $(-7) + 9$, možeš zaključiti da: $9 + (-7) = 9 - 7 = 2 = (-7) + 9$.



crt. 1

Zbir dva cijela broja se ne mijenja ako se sabirci zamijene mjestima, odnosno važi komutativni zakon. Drugim riječima:

Za svaka $a, b \in \mathbb{Z}$, važi: $a + b = b + a$.

Zadatak 1

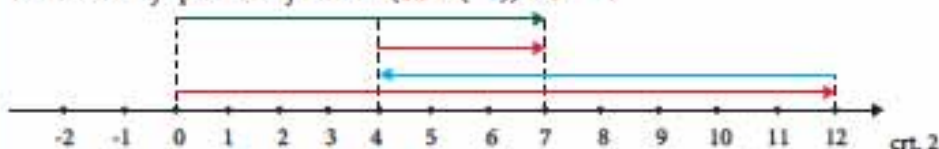
Provjeri tačnost jednakosti: $a + b = b + a$ za brojeve:

- a) $a = 81, b = -5$; b) $a = -3540, b = 3075$; c) $a = 220, b = -220$.

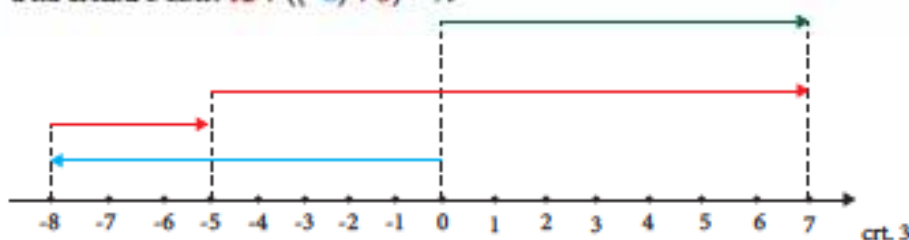
Primjer 3

Izračunaj zbirove $(12 + (-8)) + 3$ i $12 + ((-8) + 3)$.

Na crtežu 2 je predstavljen zbir: $(12 + (-8)) + 3 = 7$.



a na crtežu 3 zbir: $12 + ((-8) + 3) = 7$.



Iz jednakosti odgovarajućih koordinata slijedi da su oba zbira jednaka, odnosno: $(12 + (-8)) + 3 = 12 + ((-8) + 3)$.

Za bilo koja tri $a, b, c \in \mathbb{Z}$, oba moguća zbira $(a + b) + c$ i $a + (b + c)$ su jednaka, odnosno: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Drugim riječima, zbir tri cijela broja ne zavisi od njihovog grupisanja, odnosno za sabiranje cijelih brojeva važi asocijativni zakon. Zato, umjesto $(a + b) + c$ ili $a + (b + c)$, pišaćemo samo $a + b + c$. Na sličan način pišaćemo samo $a + b + c + d$, $a + b + c + d + e$, itd. Zbir konačno mnogo cijelih brojeva ne zavisi od njihovog grupisanja.

Zadatak 2

Na najjednostavniji način izračunaj zbirove:

- a) $730 + (-490) + (-230) + 90$ b) $1600 + (-9600) + (-1600) + 4600$

Primjer 4

Na početnoj stanici u jedan autobus gradskog prevoza ušlo je 17 putnika.

Na prvoj stanici ušlo je 10 putnika, a izašla su 3 putnika; na drugoj stanici ušlo je 7 putnika, a izašlo 5 putnika; i na trećoj stanici ušla su 4 putnika, a izašlo 12 putnika.

Koliko putnika je bilo u autobusu poslije treće stanice?

Rješenje:

Na početnoj stanici u autobus je ušlo 17 putnika.

Na prvoj stanici ušlo je 10, a izašla 3 putnika.

Novi broj putnika: $17 + 10 - 3 = 27 - 3 = 24$.

Na drugoj stanici ušlo je 7, a izašlo 5 putnika.

Novi broj putnika: $24 + 7 - 5 = 26$.

Na trećoj stanici ušla su 4, a izašlo 12 putnika.

Novi broj putnika: $26 + 4 - 12 = 18$.

Znači, poslije treće stanice u autobusu je bilo 18 putnika.

Primjer 5

Petar, Ana i Boris dobili su bodove u matematičkoj igri. Petar je imao -7 bodova, Ana $+12$ bodova, a Boris -5 bodova. Oni žele izračunati koliko ukupno bodova imaju zajedno, ali je svako računao na drugačiji način.

- a) Petar je zapisao $(-7) + (+12) + (-5)$, Ana $(+12) + (-7) + (-5)$, a Boris $(-5) + (-7) + (+12)$.
Koliko je ukupno dobio svaki? Koje svojstvo je korišteno?
- b) Upotrijebi asocijativno svojstvo da izračunaš zbir.

Rješenje:

- a) Možeš uočiti da je svako prvo zapisivao broj svojih bodova i svaki je dobio:

Petar $(-7) + (+12) + (-5) = (+5) + (-5) = 0$; Ana $(+12) + (-7) + (-5) = (+5) + (-5) = 0$;

Boris $(-5) + (-7) + (+12) = (-12) + (+12) = 0$. Time što su sabirci zapisani na različitim mjestima korišteno je komutativno svojstvo operacije sabiranja cijelih brojeva. Ukupan broj osvojenih bodova je uvijek 0.

- b) Koristeći asocijativno svojstvo, brojeve grupišiš različito: $(-7 + (-5)) + 12$, $(-7) + ((-5) + (+12))$, $(-7 + (+12)) + (-5)$ i ponovo je ukupan broj osvojenih bodova 0. Bez obzira na redoslijed (komutativnost) ili na način grupisanja (asocijativnost), rezultat ostaje 0. Dakle, igrači nemaju ni dobitak ni gubitak bodova!

Zadatak 3

Zapiši niz od šest cijelih brojeva s prvim članom 11, a svaki naredni dobija se dodavanjem broja -5 na prethodni broj (član). Svaki naredni član izračunaj na dva načina.

Koje svojstvo ćeš koristiti?

Kada sabiraš dva negativna broja, kakav će biti konačni rezultat? Hoćeš li dobiti veći negativan broj ili će konačni rezultat biti manji od sabiraka? Objasni svoj odgovor primjerima. Razmisli i o tome kako utiču komutativno i asocijativno svojstvo na sabiranje cijelih brojeva. Kako možeš primijeniti ova svojstva u svojim svakodnevnim aktivnostima?

Odgovori na sljedeća pitanja u svoju svesku:

1. Šta sam novo naučio/la danas?
2. Koji dijelovi lekcije su mi bili najrazumljiviji?
3. Na kojim mjestima sam imao/la poteškoća?

Na skali od 1 do 5, ocijeni sebe koliko uspješno si savladao/la lekciju:

- 1 – Uopšte nisam razumio/la
- 2 – Djelimično sam razumio/la
- 3 – Razumio/la sam, ali mi je potrebna dodatna pomoć
- 4 – Razumio/la sam i mogu primijeniti
- 5 – Potpuno sam razumio/la i mogu podučiti nekoga drugog

Napiši jedan ili dva koraka koje možeš poduzeti da poboljšaš svoje razumijevanje lekcije, ako je potrebno.

Samostalni rad

1. Ako $(-199) + (+101) = -98$, koliko je $(+101) + (-199)$?
2. Pokaži da je tačna jednakost $a + b = b + a$, za $a = -54$, $b = -15$.
3. Koji broj treba da stoji na mjestu x da bi bila tačna jednakost: $((-32) + (+17)) + (-20) = (-32) + (x + (-20))$?
4. Zapiši asocijativno svojstvo operacije sabiranja cijelih brojeva, a zatim provjeri tačnost istog za brojeve -14 , $+11$ i -10 .
5. Izračunaj vrijednost izraza primjenom komutativnog i asocijativnog svojstva: $(-3) + (-2) + 0 + (+1) + (+2) + (+3) + (+4)$.
6. Koji broj treba da stoji umjesto $*$? Koje svojstvo si koristio/la?
a) $(-23) + (+17) = (+17) + *$ b) $(-217) + * = (-15) + (-217)$
7. Ako je poznato da $((-16) + (+11)) + (-30) = -35$, koliko je $(-16) + ((+11) + (-30))$?
8. Neka je $A = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$. Koristeći svojstva operacije sabiranja cijelih brojeva izračunaj zbir elemenata skupa A .

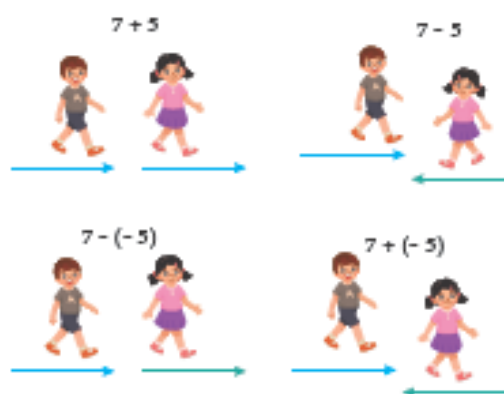
Jednačine tipa $x + a = b$. Oduzimanje cijelih brojeva

Danas ćeš se upoznati sa osnovnim konceptima jednačina tipa $x + a = b$ su važan dio rješavanja matematičkih problema.

Ova jednačina pomaže da pronađemo nepoznatu vrijednost, označenu sa x , kada su poznati brojevi a i b . U ovom procesu naučit ćeš kako primijeniti operaciju oduzimanja cijelih brojeva da bi odredio/la vrijednost x .

Kada imaš jednakost oblika $x + a = b$, cilj je da izoluješ promjenljivu x na jednoj strani jednakosti. Da bi to postigao/la, koristit ćeš pravila oduzimanja, što će ti omogućiti da odrediš rješenje jednakosti.

Ova lekcija ne samo da će ti pomoći da razumiješ kako funkcionišu jednačine, nego i kako da primjenjuješ matematičke operacije u svakodnevnom životu.



Primjer 1

Riješi jednačinu $x + 36 = 44$ u skupu $\mathbb{Z}$.

Rješenje:

Budući da je x nepoznat sabirak, on je jednak razlici zbira i poznatog sabirka, odnosno: $x = 44 - 36$, ili $x = 8$.

Provjera: $8 + 36 = 44$.

Šta se dešava sa ovim pojmovima u skupu cijelih brojeva?

Primjer 2

Riješi jednačinu $x + 17 = 11$ u skupu cijelih brojeva.

Rješenje:

Ovu jednakost riješit ćemo dodavanjem broja -17 na obje strane jednačinu:

$x + 17 + (-17) = 11 + (-17)$, odnosno $x + 0 = -(17 - 11)$. Znači, $x = -6$.

Za $a, b \in \mathbb{Z}$, svaka jednačinu oblika $x + a = b$ ima rješenje: $x = b + (-a)$ u skupu $\mathbb{Z}$.

Zadatak 1

Riješi u $\mathbb{Z}$ jednačine:

- a) $x + (-53) = 108$ b) $x + 136 = 190$ c) $103 + x = -82$ d) $-160 + x = 115$.

Rješenje jednačine $x + a = b$ u $\mathbb{Z}$ nazivamo broj koji je razlika b i a . Na isti način definiramo razliku dva cijela broja, odnosno oduzimanje u $\mathbb{Z}$.

Ako oduzmemo jedan cijeli broj b od drugog broja a , to znači da na minusu dodamo suprotan broj od minusa.

Za $a, b \in \mathbb{Z}$, razliku $a - b$ definiramo kao zbir $a + (-b)$.

Primjer 3

- Izračunaj: a) $54 - 38$ b) $(-48) - 23$ c) $139 - (-110)$ d) $(-305) - (-227)$.

Rješenje:

a) $54 - 38 =$ **Prema definiciji oduzimanja cijelih brojeva** $= 54 + (-38) = 16$

b) $(-48) - 23 = (-48) + (-23) = -71$ c) $139 - (-110) = 139 + (+110) = 249$

d) $(-305) - (-227) = (-305) + (+227) = -78$

Zadatak 2

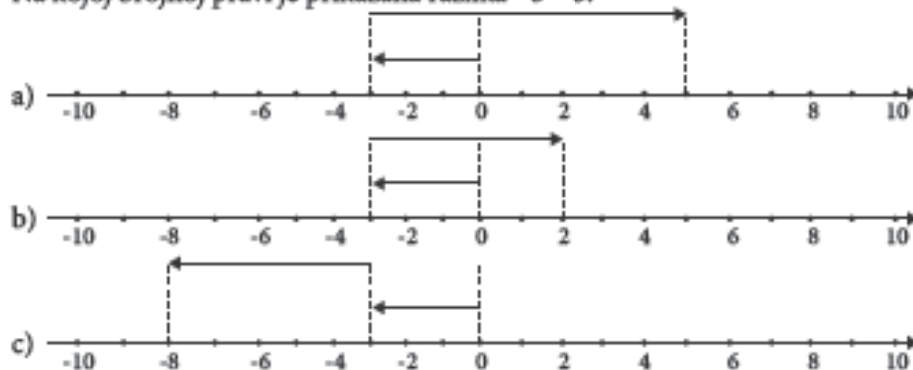
Objasni tvrdnju: Razlika bilo koja dva cijela broja opet je cijeli broj.

Zadatak 3

- Izračunaj: a) $35 - 457$ b) $(-97) - 38$ c) $244 - (-310)$ d) $(-125) - (-98)$.

Zadatak 4

Na kojoj brojnoj pravi je prikazana razlika $-3 - 5$:



Primjer 4

Marko je imao određenu sumu novca. On je kupovao karticom i nakon potrošenih 236 denara primijetio da je u dugu prema banci od 43 denara. Koliko je novca imao na početku?

Rješenje:

Neka x bude suma novca koju je Marko imao na početku. Tada možemo sastaviti jednačinu:

$$x - 236 = -43$$

Da bismo našli x , na obje strane jednačine dodajemo suprotan broj od -236 , odnosno 236 , i time dobijamo: $x - 236 + 236 = -43 + 236$, $x = +193$

Marko je imao 193 denara na početku.

Primjer 5

- Jeton ima dug od 2300 denara. Nakon nekog vremena on uspijeva da smanji dug za 1400 denara. Kako se može zapisati ova situacija s oduzimanjem cijelih brojeva? Koliko denara još mora da vrati?
- Jasna ima dug od 2300 denara i dodatno se zadužuje još 1420 denara. Nakon nekog vremena ona uspijeva da smanji dug za 3800 denara. Kako se može zapisati ova situacija s operacijama s cijelim brojevima? Kakva je situacija na Jasninom računu nakon smanjenja duga?

Rješenje:

- Objasni kako se dobija odgovarajući brojni izraz Jetonovoj opisanoj situaciji.
 $(-2300) - (-1400) = (-2300) + (+1400) = -900$. Znači, Jeton još uvijek duguje 900 denara za vraćanje.
- $(-2300) + (-1420) + 3800 = (-3720) + (+3800) = +80$. Znači, Jasna više ne duguje i ima 80 denara na svom računu. Koji dio izraza određuje dug Jasne nakon dodatnog zaduživanja? Koliki je iznos tog duga?

Primjer 6

Mite je dobio zadatak da zbiru brojeva 3792 i -4657 , doda razliku brojeva -8461 i 4966. Provjeri da li je Mite tačno riješio zadatak i ako je potrebno, ispravi.

Rješenje:

Mite je prvo izračunao zbir brojeva 3792 i -4657 , odnosno $3792 + (-4657) = -865$.

Zatim je našao razliku brojeva -8461 i 4966,

$$\text{odnosno } -8461 - 4966 = -8461 + (-4966) = -13427.$$

Prema zadatku, on je sabrao dobijeni zbir prvih dva broja s razlikom drugih dva broja:

$$-865 + (-13427) = -14292.$$

Zadatak 5

Jovana ima 330 denara u negativnom iznosu na svom bankarskom računu (odnosno je „u minusu“). Ona pozajmljuje još 48 denara od prijateljice kako bi pokrila neke troškove. Zatim, njen brat joj vraća 470 denara koje joj je duguao. Zapošite brojni izraz sa sabiranjem i oduzimanjem cijelih brojeva i odredite njegovu brojnu vrijednost. Koliko denara ima Jovana na računu nakon ovih promjena?

Zadatak 6

Od zbira najmanjeg pozitivnog dvocifrenog broja i najmanjeg negativnog dvocifrenog broja oduzmi razliku najmanjeg pozitivnog trocifrenog broja i najvećeg negativnog trocifrenog broja.

Kako ćete riješiti jednačinu $x + a = b$ u skupu cijelih brojeva?

Objasnite zašto oduzimanje cijelih brojeva može biti zapisano kao sabiranje sa suprotnim brojem.

Zapiši u svoju svesku.

Da li sam razumio? Ocijenite se na skali od 1 do 5:

- 1: Uopšte nisam razumio.
- 2: Razumio sam malo.
- 3: Razumio sam, ali se ne osjećam sigurno.
- 4: Razumio sam dobro, mogu to objasniti drugima.
- 5: Sve mi je jasno, osjećam se kao ekspert!

Pitanja za razmišljanje:

1. Šta mi je bilo najzanimljivije što sam naučio?
2. Kako mogu primijeniti ovo znanje u svakodnevnom životu?
3. Imam li pitanja ili nešto što mi nije jasno?

Za svaku ocjenu od 4 ili 5, nacrtajte zvijezdu, „zvijezda znanja“.

Možete podijeliti svoju ocjenu i jedan interesantan fakt koji ste naučili sa svojim saučenicima.

Samostalni rad

- Riješi jednačinu $x + 15 = 27$ dodavanjem suprotnog broja od broja 15 na obje strane jednačine.
- Riješi jednačine:
a) $x + (-34) = -29$ b) $(+32) + x = -8$ c) $x + (+11) = -33$ d) $(-76) + x = 5$
- Izračunaj:
a) $(+24) - (+25)$ b) $(-67) - (+60)$ c) $(+55) - (-5)$ d) $(-102) - (-2)$
e) $(+8) - (-13)$ f) $(-49) - (+11)$ g) $(-84) - (-10)$ h) $(-200) - (+10)$
- Riješi jednačine:
a) $x - (+14) = -37$ b) $(-200) - x = -7$ c) $(+31) - x = +40$ d) $x - (-22) = -13$
- Ako se na -15 doda neki broj, dobije se razlika brojeva -7 i $+15$. Koji je to broj?
- Od razlike brojeva -15 i $+10$ oduzmi njihov zbir.
- Koji broj treba dodati na zbir brojeva 88 i -52 da bi se dobio zbir brojeva -44 i -52 ?

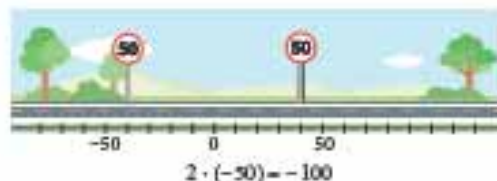
Množenje cijelih brojeva

U ovoj lekciji istraživaćeš kako množiti cijele brojeve s istim i različitim znacima.

Množenje je važna matematička operacija koja ti ne samo pomaže da rješavaš probleme, nego i da razvijaš logičko razmišljanje.

Pravila za množenje cijelih brojeva s istim ili različitim znacima pomoći će ti da razumiješ kako rješavati različite matematičke zadatke povezane s množenjem.

Upravo u ovoj lekciji radićeš na problemima koji će ti pomoći da primijeniš ova pravila i da budeš siguran u svoje sposobnosti za rad s cijelim brojevima.



Primjer 1

Izračunaj $(+72) \cdot (+9)$.

Rješenje:

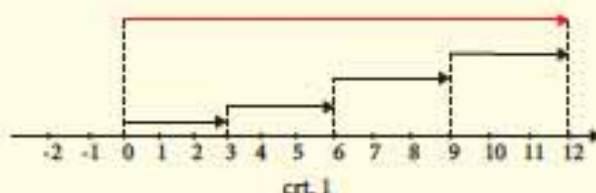
Budući da skup pozitivnih cijelih brojeva odgovara skupu prirodnih brojeva, odnosno $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$, operaciju množenja u skupu $\mathbb{N}$ možemo posmatrati i kao operaciju množenja u skupu $\mathbb{Z}^+$. Drugim riječima, množenje pozitivnih cijelih brojeva isto je kao i množenje prirodnih brojeva. Tako: $(+72) \cdot (+9) = 72 \cdot 9 = 648$, jer $+72 = 72$ i $+9 = 9$.

Primjer 2

Posmatraj kretanje tačke po brojevnoj pravci, s lijeva na desno, tako da svake sekunde prelazi 3 jedinice. Ako je tačka sada u 0, gdje će se nalaziti nakon 4 sekunde?

Rješenje:

Budući da je kretanje po brojevnoj pravci udesno (pozitivan smjer), nakon 4 sekunde tačka će biti na broju 12, odnosno: $(+3) \cdot 4 = +|3 \cdot 4| = +12 = 12$. To je prikazano na brojevnoj osi na crt. 1.



Primjer 3

Posmatraj kretanje tačke po brojevnoj pravci s desna na lijevo, tako da svake sekunde prelazi 3 jedinice. Ako je tačka sada u 0, gdje je bila prije 4 sekunde?

Rješenje:

Budući da je kretanje po brojevnoj pravci ulijevo (negativan smjer), prije 4 sekunde (prošlost, negativan smjer) tačka je bila na pozitivnom dijelu brojne prave.

Razmišljamo ovako: prije 1 sekunde bila je

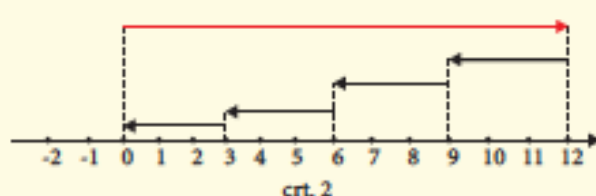
3 jedinice desno; prije 2 sekunde bila je

$2 \cdot 3$ jedinice desno; prije 3 sekunde bila je

$3 \cdot 3$ jedinice desno; a prije 4 sekunde bila je $4 \cdot 3$ jedinice desno, odnosno na broju 12.

Budući da se tačka kretala 3 jedinice ulijevo u sekundi („-3 jedinice“), a traži se položaj tačke prije 4 sekunde („-4 sekunde“), zaključujemo da je proizvod ova dva negativna broja:

$(-3) \cdot (-4) = +|3 \cdot 4| = +12 = 12$. Ovo je prikazano na crt. 2. Proizvod dva cijela broja s istim znacima jednak je proizvodu njihovih apsolutnih vrijednosti (kao prirodnih brojeva) sa pozitivnim znakom.



Prema primjerima 2 i 3, može se zapisati:

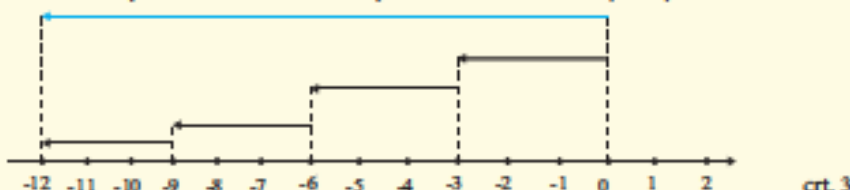
Odnosno, za $a, b \in \mathbb{Z}$, dva istovremeno pozitivna ili istovremeno negativna broja važi:
 $a \cdot b = |a| \cdot |b|$.

Primjer 4

Posmatraj kretanje tačke po brojevnoj pravoj, s desna na lijevo, tako da svake sekunde prelazi 3 jedinice. Ako je tačka sada u 0, gdje će se nalaziti nakon 4 sekunde?

Rješenje:

U ovom slučaju kretanje po brojevnoj pravoj je ulijevo (negativan smjer), a traži se položaj nakon 4 sekunde (budućnost, „pozitivno vrijeme“). Sa crt. 3 zaključuje se da će nakon 4 sekunde tačka biti na broju -12. Možemo zaključiti da $(-3) \cdot 4 = -|3 \cdot 4| = -12$.

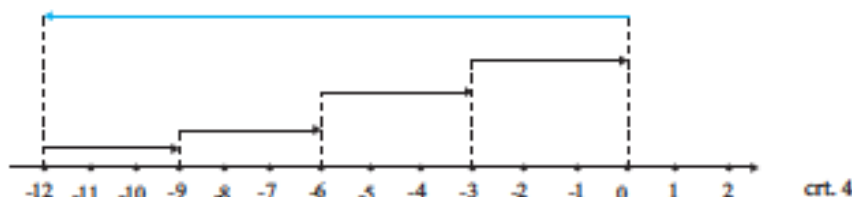


Primjer 5

Posmatraj kretanje tačke po pravu, s lijeva na desno, tako da svake sekunde prelazi 3 jedinice. Ako je tačka sada u 0, gdje je bila prije 4 sekunde?

U ovom slučaju kretanje po brojevnoj pravu je udesno (pozitivan smjer), a traži se položaj prije 4 sekunde. Sa crt. 4 može se zaključiti da je prije 4 sekunde tačka bila na broju -12.

Možemo zapisati: $3 \cdot (-4) = -|3 \cdot 4| = -12$.



Rješavanjem primjera 4 i 5 uočava se:

Proizvod dva cijela broja s različitim znacima je negativan broj čija je apsolutna vrijednost jednaka proizvodu apsolutnih vrijednosti ta dva broja (kao proizvod prirodnih brojeva).

Odnosno, za $a \cdot b \in \mathbb{Z}$, ako su dva cijela broja različitih znakova (jedan pozitivan, drugi negativan), važi: $a \cdot b = -(|a| \cdot |b|)$.

Znaci množitelja	Znak proizvoda	Operacija između apsolutnih vrijednosti brojeva	Primjer
$\oplus \cdot \oplus$	+	množenje	$(+2) \cdot (+3) = +6$
$\ominus \cdot \ominus$	+		$(-2) \cdot (-3) = +6$
$\oplus \cdot \ominus$	-		$(+2) \cdot (-3) = -6$
$\ominus \cdot \oplus$	-		$(-2) \cdot (+3) = -6$

Zadatak 1

Izračunaj proizvode:

- a) $(+72) \cdot (+27)$ b) $(+108) \cdot (+49)$ c) $(-105) \cdot (-63)$ d) $(-5086) \cdot (-309)$
 e) $(+12) \cdot (-6)$ f) $(-36) \cdot (+5)$ g) $(-256) \cdot (+28)$ h) $(+408) \cdot (-105)$

Primjer 6

Proizvod brojeva -62 i $+806$ smanji za broj -2686 .

Rješenje:

Proizvod brojeva -62 i $+806$, odnosno $(-62) \cdot (+806) = -(|62| \cdot |806|) = -49\,972$.

Dobijeni proizvod treba smanjiti za broj -2686 , odnosno:

$-49\,972 - (-2686) = -49\,972 + (+2686) = -47\,286$.

Primjer 7

Jednog zimskog dana u podne temperatura je bila $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$, a navečer je bila 3 puta niža. Kolika je bila temperatura navečer?

Rješenje:

$(-7) \cdot 3 = -21$, znači temperatura navečer bila je $-21\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Zadatak 2

Danijela radi kao dizajnerka u visokoj zgradi čiji su katovi označeni brojevima od -3 do 18 . Ona treba urediti sve katove, pa se liftom kreće više puta, gore i dolje.

Počevši s 10 . kata, spušta se 3 puta po 4 kata dolje. Na kojem je katu sada Daniela?

Kako bi objasnio razliku između proizvoda dva pozitivna cijela broja i proizvoda jednog pozitivnog i jednog negativnog cijelog broja? Zašto je važno razumjeti kako znakovi utječu na konačan rezultat pri množenju?

U svesku napravi tabelu s tri kolone s naslovima „Naslov lekcije“, „Stepen razumijevanja“ i „Pitanja/Komentari“.

Za naslov lekcije zapiši „Množenje cijelih brojeva“.

U drugu kolonu ocijeni svoje razumijevanje jednom od sljedećih opcija:

✓ Mnogo dobro razumijem, + Dobro razumijem, ? Imam nešto nejasno, X Ne razumijem.

U treću kolonu zapiši najmanje jedno pitanje ili komentar koji imaš o temi. To može biti nešto što ne razumiješ, nešto što ti je zanimljivo ili neka poveznica koju si napravio sa svakodnevnim životom.

Na kraju možeš podijeliti svoje odgovore, posebno pitanja ili komentare, sa svojim školskim drugovima. To će ti pomoći u razmjeni ideja i dodatnom razumijevanju teme.

Samostalni rad

- Prikaži proizvod $(+3) \cdot (-2)$ na brojevnoj pravi.
- Brojevi $+15$ i $+3$ su pomnoženi na sljedeći način:
 $(+15) \cdot (+3) = +(|+15| \cdot |+3|) = +(15 \cdot 3) = +45$
 Na isti način izračunaj $(-9) \cdot (-12)$.
- Izračunaj:
 a) $(+9) \cdot (+2)$ b) $(+21) \cdot (+31)$ c) $(-11) \cdot (-6)$ d) $(-15) \cdot (-15)$ e) $(-11) \cdot (-18)$
- Koji broj treba da stoji umjesto *?
 a) $(-13) \cdot 0 = *$ b) $* \cdot (+456) = 0$ c) $(-237) \cdot 0 = *$
- Ako se nekom broju doda $+37$, dobit će se proizvod brojeva -13 i -2 . Koji je to broj?
- Nađi proizvod brojeva: 1) $+3$ i -2 2) $+4$ i -2
 a) na brojevnoj pravi
 b) koristeći apsolutnu vrijednost brojeva.
- Kakav broj će se dobiti (pozitivan, negativan ili nula) ako se pomnože:
 a) jedan pozitivan i jedan negativan broj?
 b) dva negativna i jedan pozitivan broj?
 c) tri negativna broja i nula?
 d) tri negativna broja i dva pozitivna broja?

8. Usporedi pomoću znakova $<$, $>$ ili $=$.

- a) $(-11) \cdot (+3)$ i 0 b) $(-12) \cdot (-4)$ i 0
c) $(-17) \cdot 0$ i 0 d) $(+97) \cdot (-97)$ i 0

9. Nađi vrijednost $(-9) \cdot x$ za:

- a) $x = +14$ b) $x = +1$ c) $x = 0$ d) $x = -1$

10. Zapiši kao zbir proizvod $(-4) \cdot (+5)$, a zatim ga izračunaj.

11. Proizvod brojeva -23 i 2 smanji za razliku brojeva -16 i $+14$ pomnoženu s nulom.

12. Zapiši zbir kao proizvod, a zatim izračunaj.

- a) $(-15) + (-15) + (-15) + (-15)$ b) $(-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7)$

13. Izračunaj:

- a) $(-1) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5)$ b) $(-8) \cdot (-7) \cdot (-6) \cdot (+2) + (-4) \cdot (-3)$

Svojstva operacije množenja cijelih brojeva

U ovoj lekciji ćeš se upoznati sa svojstvima operacije množenja cijelih brojeva. Kao što znaš, množenje je jedna od osnovnih matematičkih operacija, a ujedno i jedna od najčešće korištenih u svakodnevnom životu. Bez obzira radiš li s pozitivnim ili negativnim brojevima, pravila za množenje važna su za pravilno rješavanje matematičkih zadataka. U ovoj lekciji istražit ćeš različita svojstva množenja, kao što su komutativnost, asocijativnost i distributivnost, te kako se ona primjenjuju kada radiš s cijelim brojevima. Naučit ćeš kako primjenjivati ova svojstva da bi olakšao/la proračune.



U svoju svesku napravi misaonu mapu o svojstvima koja znaš u skupu prirodnih brojeva.

Za množenje u $\mathbb{N}$ znaš da je komutativno i asocijativno, a isto tako je i distributivno u odnosu na sabiranje, pa ista svojstva važe i za množenje nenegativnih brojeva. Da li ta svojstva važe za proizvoljne cijele brojeve?

Primjer 1

Izračunaj proizvode: $(-5) \cdot (-4)$ i $(-4) \cdot (-5)$ i zatim ih usporedi.

Rješenje:

Na osnovu načina na koji je definisano množenje dobiva se da $(-5) \cdot (-4) = 20 = (-4) \cdot (-5)$.

Za svaka $a, b \in \mathbb{Z}$ važi $a \cdot b = b \cdot a$, odnosno proizvod dva cijela broja se ne mijenja ako se množitelji zamijene mjestima.

Drugim riječima, množenje cijelih brojeva je komutativna operacija.

Zadatak 1

Provjeri jednakost $a \cdot b = b \cdot a$ za:

- a) $a = 352, b = -52$; b) $a = -589, b = 67$; c) $a = -2080, b = -84$.

Primjer 2

Izračunaj proizvode $[(-43) \cdot (+6)] \cdot (-9)$ i $(-43) \cdot [(+6) \cdot (-9)]$.

Rješenje:

$$[(-43) \cdot (+6)] \cdot (-9) = (-|43 \cdot 6|) \cdot (-9) = (-258) \cdot (-9) = |258 \cdot 9| = 2322.$$

$$(-43) \cdot [(+6) \cdot (-9)] = (-43) \cdot (-|6 \cdot 9|) = (-43) \cdot (-54) = |43 \cdot 54| = 2322.$$

Proizvodi su jednaki.

Za svaka $a, b, c \in \mathbb{Z}$ važi: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, odnosno proizvod cijelih brojeva ne zavisi od načina grupisanja množitelja.

Drugim riječima, množenje cijelih brojeva je asocijativna operacija.

Zadatak 2

Provjeri jednakost $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ za:

- a) $a = (-198), b = -50, c = 22$ b) $a = 115, b = -48, c = 75$.

Primjer 3

Izračunaj: $(156 + 82) \cdot (-7)$ i $[156 \cdot (-7)] + [82 \cdot (-7)]$. Šta primjećuješ?

Rješenje:

$$(156 + 82) \cdot (-7) = 238 \cdot (-7) = -|238 \cdot 7| = -1666;$$

$$[156 \cdot (-7)] + [82 \cdot (-7)] = (-|156 \cdot 7|) + (-|82 \cdot 7|) = (-1092) + (-574) = -(1092 + 574) = -1666.$$

Može se primijetiti da su vrijednosti oba brojeva izraza jednake.

Za svaka $a, b, c \in \mathbb{Z}$ važe jednakosti:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ i } (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

Zbog komutativnosti množenja i sabiranja važe i:

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b \text{ i } c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$$

Drugim riječima, množenje cijelih brojeva je distributivno u odnosu na sabiranje i oduzimanje.

Zadatak 3

Za $a = -12$, $b = 40$, $c = -15$, $m = 25$. Provjeri tačnost jednakosti:

$$(a + b - c) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m - c \cdot m$$

Primjer 4

Jedna kompanija za proizvodnju tople odjeće ima gubitke (kompanija „je u minusu“) tokom zimskih mjeseci. U januaru kompanija ima gubitak od 3000 eura („u minusu“ 3000 eura), a u februaru gubitak od 2000 eura. Kompanija odlučuje izračunati ukupne gubitke za oba mjeseca, ali također želi izračunati koliki bi bili gubici u ljetnoj sezoni kada bi se povećali 3 puta u odnosu na mjesec januar i februar zajedno. Izračunaj ukupne gubitke kompanije u ljetnoj sezoni na dva načina.

Rješenje:

Način 1: $((-3000) + (-2000)) \cdot 3 = (-5000) \cdot 3 = -15\,000$ Ukupni gubitak za oba mjeseca (januar i februar) je $(-3000) + (-2000) = -5000$, a za očekivano povećanje gubitka 3 puta dobije se $(-5000) \cdot 3 = -15\,000$ eura ukupnog gubitka u ljetnoj sezoni.

Način 2: $((-3000) + (-2000)) \cdot 3 = (-3000) \cdot 3 + (-2000) \cdot 3 = (-9000) + (-6000) = -15\,000$
 $(-3000) \cdot 3 = -9000$ gubitak koji se očekuje u ljetnoj sezoni u poređenju s mjesecom januar,
 $(-2000) \cdot 3 = -6000$ gubitak koji se očekuje u ljetnoj sezoni u poređenju s mjesecom februar,
pa ukupni gubitak koji se predviđa za ljetnu sezonu iznosi $(-9000) + (-6000) = -15\,000$.

Zadatak 4

Studentski restoran nudi meni za studente po povoljnim cijenama. U meniju ima 3 piroške i 2 čaše povrnog smutija. Jedan student kupuje 4 takva menija, a drugi uzima 12 piroški i 8 čaša smutija. Jesu li oba studenta kupila isti broj proizvoda?

Koje je svojstvo i kako iskorišteno za olakšavanje izračuna u brojnom izrazu

$$1997 \cdot (-4) = (2000 - 3) \cdot (-4) = 2000 \cdot (-4) - 3 \cdot (-4)?$$

Navedite primjere u kojima se mogu iskoristiti svojstva množenja cijelih brojeva pri izračunima u konkretnim situacijama iz svakodnevnog života.

Precrtaj tabelu u svoju svesku i stavi jedan od znakova za svako svojstvo:

☒ - razumijem i mogu objasniti, ? - malo mi nije jasno ☒ - ne razumijem

Komutativno svojstvo	Asocijativno svojstvo	Distributivno svojstvo

Ispod tabele zapiši primjer za svojstvo/a za koje si stavio/la znak ☒

Samostalni rad

- a) Zapiši komutativno svojstvo operacije množenja cijelih brojeva.
 b) Ako $(-11) \cdot (+12) = -132$, koliko je $(+12) \cdot (-11)$?
- Koristeći asocijativno svojstvo, odredi koji broj treba stajati umjesto $*$ u jednakostima:
 - $((-99) \cdot (+28)) \cdot (-14) = * \cdot ((+28) \cdot (-14))$
 - $(+19) \cdot ((* \cdot (-47))) = ((+19) \cdot (-38)) \cdot (-47)$
- Provjeri asocijativno svojstvo $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, ako je $a = -9$, $b = -4$, $c = -10$.
- a) Koliko iznosi x ako $(-45 + x) \cdot (-2) = (-45) \cdot (-2) + (-3) \cdot (-2)$?
 b) Ako $(-18 + 8) \cdot (-3) = 30$, koliko je $(-18) \cdot (-3) + (+8) \cdot (-3)$?
- Izračunaj na najlakši mogući način $(+50) \cdot (-25) \cdot (-2) \cdot (+4)$
- Iskoristi distributivno svojstvo i izračunaj:
 - $3 \cdot 11 + 3 \cdot 22$
 - $(-14) \cdot (-8) + (-14) \cdot (-2)$
- Izračunaj vrijednost izraza uz prethodno korištenje distributivnog svojstva:

$$4 \cdot (-8) + 2 \cdot (-8) + 5 \cdot (-8)$$

Dijeljenje cijelih brojeva

U svakodnevnom životu često se susrećeš sa situacijama u kojima treba nešto podijeliti na jednake dijelove. Na primjer, ako imaš 12 jabuka i želiš ih podijeliti jednako među 4 prijatelja, svaki će dobiti po 3 jabuke. Ovo je jednostavan primjer dijeljenja u skupu prirodnih brojeva. Ali, šta se događa kada radimo s cijelim brojevima koji uključuju i negativne brojeve? Da li ista pravila važe i kada dijelimo negativan broj? U ovoj lekciji istražit ćeš kako funkcionira dijeljenje u skupu cijelih brojeva, koja su pravila za znakove i kako možeš primijeniti ovo znanje u različitim situacijama.

Važno je razumjeti da operacija dijeljenja nije uvijek izvodljiva u skupu prirodnih brojeva, pa tako i u skupu cijelih brojeva postoje ograničenja. Kao što je dijeljenje u skupu prirodnih brojeva (N) definirano preko množenja, tako se i dijeljenje u skupu cijelih brojeva (Z) zasniva na istom principu. Kroz ovu lekciju naučit ćeš kako razlikovati izvodiva i neizvodiva dijeljenja, kako odrediti količnik i kako pravilno primijeniti operacije s cijelim brojevima u praktičnim primjerima.



Primjer 1

Ana, Bojan i Viktor sakupili su 168 plodova iz voćnjaka i odlučili ih podijeliti u tri paketa.

- Da li bi broj plodova u svakom od tri paketa koje žele napraviti bio prirodan broj?
- Koliko plodova će biti u svakom paketu?
- Ako im se pridruže još dva prijatelja i žele napraviti pakete za svakog od njih s jednakim brojem plodova, da li je dijeljenje moguće u skupu prirodnih brojeva?

Rješenje:

- Da bismo provjerili hoće li troje dobiti prirodan broj plodova, zapravo trebamo provjeriti djeljivost 168 s 3. Prema pravilu djeljivosti s 3, to je ispunjeno, pa će u svakom od tri paketa biti prirodan broj plodova.
- $168 : 3 = 56$. Dakle, ako naprave 3 paketa, svaki će sadržavati 56 plodova.
- Ako im se pridruže još dva prijatelja, tada se broj paketa treba povećati na 5. Broj 168 nije djeljiv s 5. Zašto? Hoće li se dobiti prirodan broj?

Dijeljenje u skupu prirodnih brojeva pomaže nam organizirati predmete u jednake grupe. U ovom slučaju, broj paketa zavisi od toga koliko ljudi sudjeluje u podjeli.

Neka su a i b dva cijela broja ($a, b \in \mathbb{Z}$). Podijeliti broj a s brojem b znači naći cijeli broj c (ako takav postoji) takav da $b \cdot c = a$. Ako postoji takav cijeli broj c , njega zovemo količnik, a nazivamo djeljenik, a b nazivamo djelilac. Tada kažemo da je b djelilac od a i pišemo $b \mid a$.

Primjer 2

Nađi cijeli broj x (ako postoji) za koji $12 \cdot x = 84$.

Rješenje:

Dijelimo $84 : 12$ i dobijemo da je $x = 7$.

Pri dijeljenju dva cijela broja postoje dva slučaja. Prvi slučaj je kada djeljenik i djelilac imaju iste znakove (oba pozitivna ili oba negativna). Drugi slučaj je kada djeljenik i djelilac imaju različite znakove.

Primjer 3

Da izračunamo nepoznati broj u jednačini:

- a) $8 \cdot x = 128$ b) $(-15) \cdot x = 165$

Rješenje:

- a) Proizvod u jednačini $8 \cdot x = 128$ je pozitivan broj. Da bi se dobio pozitivan proizvod, oba množitelja moraju biti pozitivna ili oba negativna. Budući da je broj 8 pozitivan, tada i nepoznati broj x mora biti pozitivan.

$$x = |128 : 8| = 16, \text{ zato što } 16 \cdot 8 = 128.$$

- b) Jednačina $(-15) \cdot x = 165$ ima jednog negativnog množitelja. Da bi proizvod bio pozitivan (+165), drugi množitelj, broj x , mora biti negativan.

$$x = 165 : (-15) = -|165 : 15| = -11, \text{ zato što } (-11) \cdot (-15) = +|11 \cdot 15| = +165.$$

Svojstvo iz primjera izražava se u općem slučaju ovako:

Količnik dva cijela broja s istim znacima, ako postoji, je pozitivan broj.

Ako $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ili $a, b \in \mathbb{Z}^-$ i $b \mid a$, tada vrijedi: $a : b = |a| : |b|$

Primjer 4

Da izračunamo nepoznati broj x :

- a) $(-13) \cdot x = -260$ b) $x \cdot 23 = -184$

- a) Rješenje jednačine je pozitivan broj. Budući da je proizvod -260 negativan, množitelji moraju biti različitih znakova. Budući da je -13 negativan, tada x mora biti pozitivan.

$$\text{Računamo: } x = (-260) : (-13) = |260 : 13| = 20$$

$$\text{Provjera: } (-13) \cdot (+20) = -260.$$

- b) Rješenje jednačine je negativan broj. Budući da je proizvod -184 negativan, množitelji moraju imati različite znakove.

Broj 23 je pozitivan, pa prema tome x mora biti negativan. $x = (-184) : 23 = -|184 : 23| = -8$

Provjera: $(-8) \cdot 23 = -184$.

Količnik dva cijela broja s različitim znacima, ako postoji, je negativan broj.

Ako $a \in \mathbb{Z}^+$, $b \in \mathbb{Z}^-$ ili $a \in \mathbb{Z}^-$, $b \in \mathbb{Z}^+$ i $b \mid a$, tada:

$a : b = -(|a| : |b|)$, gdje je dijeljenje $|a| : |b|$ dijeljenje prirodnih brojeva.

Primjer 5

Nađi cijeli broj (ako postoji) za koji $7 \cdot x = 37$.

Rješenje:

Budući da se broj 37 ne može predstaviti kao proizvod od 7 i nekog drugog cijelog broja, takav cijeli broj x ne postoji.

Zadatak 1

Izračunaj količnike:

- | | | | |
|----------------|-------------------|------------------|---------------------|
| a) $1248 : 24$ | b) $(-96) : (-8)$ | c) $2016 : 32$ | d) $(-338) : (-26)$ |
| e) $(-80) : 5$ | f) $1856 : (-29)$ | g) $(-364) : 14$ | h) $2117 : (-73)$ |

Zadatak 2

Ako je $a \in \mathbb{Z}$, objasni zašto:

- | | | |
|------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------|
| a) $a : 1 = a$ | b) $a : 0$ ne postoji ili nema smisla | c) $a : (-1) = -a$ |
| d) $a : a = 1$ za $a \neq 0$ | e) $0 : a = 0$ za $a \neq 0$ | f) $a : (-a) = -1$ za $a \neq 0$ |

Primjer 6

Jedna firma, zbog neuspješne reklamne kampanje, imala je finansijski gubitak od 84 000 denara. Ovaj gubitak, koji se može predstaviti kao negativan broj $(-84\,000)$, ravnomjerno je raspoređen među 7 marketinških projekata. Odredi koliko denara je gubitak po projektu.

Rješenje:

Gubitak je dat kao negativan broj $(-84\,000)$, a broj projekata je pozitivan $(+7)$.

Pri dijeljenju dva cijela broja s različitim znacima, količnik će biti negativan.

$$x = (-84\,000) : 7 = -12\,000$$

Provjera: $(-12\,000) \cdot 7 = -84\,000$, što je u skladu s datim gubitkom.

Svaki marketinški projekat donosi gubitak od 12 000 denara.

Zadatak 3

U igri je Tome dobio negativan rezultat od (-90) bodova zbog neuspješnih skokova. Ako se ovaj negativni rezultat raspodijeli jednako na 5 skokova, odredi koliko je poena Tome gubio na svakom skoku.

Šta misliš, kako ti pravilno razumijevanje operacije dijeljenja cijelih brojeva, posebno kada radimo s negativnim brojevima, može pomoći da donosiš jasnije odluke u svakodnevnom životu, na primjer, pri raspodjeli troškova ili resursa?

„Matematički semafor“

U tvojoj svesci:

1. Stavi crveno  (Znači: Potrebna mi je pomoć!)

Napiši jedno pitanje ili dio koji ti je najnejasniji.

2. Žuto  (Znači: Razumijem djelimično, ali imam neke sumnje!)

Napiši jedan problem koji možeš riješiti i jedan koji ti stvara poteškoće.

3. Zeleno  (Znači: Razumijem i mogu objasniti drugu/drugarici!)

Napiši jedan svoj primjer problema s dijeljenjem cijelih brojeva i njegovo rješenje.

Samostalni rad

1. Izračunaj:

- a) $(+56) : (+8)$ b) $(-36) : (-12)$ c) $(+117) : (-1)$ d) $(-585) : (-15)$ e) $(+54) : (-9)$
 f) $0 : (-12)$ g) $(+374) : (-1)$ h) $(-148) : (+37)$ i) $(-32) : (+8)$ j) $(+200) : (-10)$

2. Nađi vrijednost izraza y : 12 za: a) $y = 48$ b) $y = -156$

3. Riješi jednačine:

- a) $(-88) : x = 8$ b) $(+45) \cdot x = -540$ c) $(-533) \cdot x = +41$ d) $x \cdot (+79) = -790$

4. Razliku brojeva -27 i 9 podijeli s njihovim zbirom.

5. Ako se neki broj pomnoži s -24 , dobit će se proizvod brojeva -8 i 21 . Koji je to broj?

6. Biljana je zamislila broj. Kada je taj broj pomnožila sa zbirom brojeva -14 i 44 , dobila je količnik brojeva -390 i 13 . Koji broj je Biljana zamislila?

7. Šta se može zaključiti o djeljeniku i djeljitelju dva cijela broja ako:

- a) njihov količnik je $+1$? b) njihov količnik je -1 ? c) njihov količnik je 0 ?

8. Koji se broj dobije ako se količnik brojeva $+65$ i -13 poveća za količnik brojeva -50 i -10 ?

Vrijednost brojnog izraza

Zamisli da si u prodavnici i treba da izračunaš koliko ćeš platiti ako kupiš 3 čokolade po 50 dinara i 2 soka po 80 dinara. Umjesto da to računaš odvojeno, možeš sastaviti izraz: $3 \cdot 50 + 2 \cdot 80$. Kada izračunaš vrijednost ovog izraza, dobijaš tačan iznos za plaćanje. Ovo je primjer brojčane vrijednosti izraza – konačnog rezultata koji se dobije kada izvršiš operacije.

U ovoj lekciji ćeš naučiti: šta je brojni izraz, kako da izračunaš njegovu brojčanu vrijednost i kako pravilno da primjenjuješ redoslijed operacija.

Na kraju lekcije ćeš moći brzo i tačno da izračunavaš vrijednosti brojnih izraza i da ih koristiš u svakodnevnim situacijama.



2744,24	200,31	241,00	23,90
2744,24	200,31	241,00	23,90
1790,00	1,000,00	1,500,00	0,00
1790,00	1,000,00	1,500,00	0,77
1790,00	1,000,00	1,500,00	0,00
1790,00	2,000,00	1,500,00	0,00
1790,00	2,000,00	1,500,00	0,00
1790,00	100,00	0,00	0,00

Primjer 1

Marija štedi novac za novu knjigu. Ona svake sedmice stavlja po 250 dinara u kasicu. Poslije 4 sedmice njena baka joj je dodala još 600 dinara.

- Sastavi brojni izraz koji predstavlja ukupan iznos koji će Marija imati poslije 4 sedmice.
- Izračunaj brojčanu vrijednost izraza.

Rješenje:

- Prvo izračunavamo iznos koji Marija ima nakon četiri sedmice štednje: $4 \cdot 250$. Na taj iznos dodajemo novac od bake i dobijamo brojni izraz: $(4 \cdot 250) + 600$.
- Računamo brojčanu vrijednost: $1000 + 600 = 1600$ dinara.
Marija će imati 1600 dinara poslije 4 sedmice. Ovaj primjer ti pomaže da se podsjetiš kako se sastavlja brojni izraz i kako se pravilno izračunava njegova brojna vrijednost u skupu prirodnih brojeva.

Zadatak 1

Zbir brojeva 1326 i 879 umanji za razliku brojeva 453 i 191.

Izrazi sastavljeni od brojeva povezanih znacima matematičkih operacija (mogu sadržavati i zagrade) zovu se brojni izrazi.

Broj koji se dobije izvršavanjem svih operacija u brojnom izrazu zove se brojna vrijednost izraza.

Često se kaže da su dva brojna izraza jednaka ako imaju jednake brojčane vrijednosti.

Primjer 2

Izračunaj brojčanu vrijednost izraza: $5 \cdot [(-21) - (60 - 12) : (-8)]$

Rješenje:

$$5 \cdot [(-21) - (60 - 12) : (-8)] = 5 \cdot [(-21) - 48 : (-8)] = 5 \cdot [(-21) - (-6)] = 5 \cdot [(-21) + (+6)] = 5 \cdot (-15) = -75$$

Pri izračunavanju vrijednosti brojnih izraza treba znati sljedeće:

1. Operacije sabiranja i oduzimanja nazivaju se operacije prvog reda, a operacije množenja i dijeljenja operacije drugog reda. Operacija stepenovanja se često naziva operacijom trećeg reda.
2. U brojnim izrazima bez zagrada, sastavljenim samo od operacija prvog reda ili samo od operacija drugog reda, postoji dogovor da prednost imaju operacije koje se nalaze lijevo – prvo se izvršava krajnje lijeva operacija, zatim krajnje lijeva iz novodobijenog izraza itd. Drugim riječima, operacije se izvršavaju redom kako su zapisane, slijeva nadesno.
3. U brojnim izrazima bez zagrada, u kojima se javljaju operacije različitih redova, dogovoreno je da prednost imaju operacije višeg reda, a operacije istog reda se izvršavaju redom kako su zapisane.
4. U brojnim izrazima sa zagradama, prvo se izračunava vrijednost izraza u zagradi prema pravilima iz tačke 2 ili 3, a zatim se u dobijenom izrazu bez zagrada ponovo primjenjuju pravila iz tačke 2 ili 3.

Ukratko, redoslijed izvršavanja operacija u brojnom izrazu je:

1. Zgrade
2. Stepovanje
3. Množenje, dijeljenje (slijeva-nadesno)
4. Sabiranje, oduzimanje (slijeva-nadesno)

Primjer 3

Izračunaj: a) $(-24) - [48 : (-6)]$, b) $[(-24) - 48] : (-6)$ i c) $(-24) - 48 : (-6)$. Objasni što ćeš koristiti pri računanju.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \text{a) } (-24) - [48 : (-6)] &= \text{Prvo se računa u zagradi, ostali dio izraza se prepisuje} \\ &= (-24) - (-8) = (-24) + (+8) = -16 \end{aligned}$$

b) $[(-24) - 48] : (-6) =$ Prvo se računa u zagradi, ostatak izraza se prepisuje
 $= (-72) : (-6) = 12$

c) $(-24) - 48 : (-6) =$ Prednost ima operacija višeg reda, ostatak izraza se prepisuje
 $= (-24) - (-8) = (-24) + (+8) = -16$

Šta misliš, zašto brojni izrazi $(-24) - [48 : (-6)]$, $(-24) - 48 : (-6)$ imaju istu brojčanu vrijednost?
Da li se zagrade u prvom izrazu mogu izostaviti i zašto?

Zadatak 2

Izračunaj vrijednost brojnog izraza:

a) $(+23) + (-48) - (-79)$

b) $7 \cdot (-21) + 52 : (-13)$

c) $(-60) \cdot (-5) : 6 \cdot (-9)$

d) $294 : [(-18) - (-15)] + (-47) \cdot 2$

e) $5 \cdot (-21) - [(-21) - (60 - 12) : (-8)]$

f) $18 - 34 + 27 - 52 + 18 - 13$

Primjer 4

Izračunaj: a) $(-15) + (-7)$ b) $(-15) - (-7)$ c) $-(-15) + (-7)$ d) $+(-15) - (+7)$

Rješenje:

a) $(-15) + (-7) = -15 - 7 = -22$

b) $(-15) - (-7) = -15 + 7 = -8$

c) $-(-15) + (-7) = +15 - 7 = +8$

d) $+(-15) - (+7) = -15 - 7 = -22$

Prije računanja, brojni izrazi su zapisani bez zagrada. Šta možeš primjetiti?

$-(-a) = +a$ suprotan broju $-a$ je broj $+a$

$-(+b) = -b$ suprotan broju $+b$ je broj $-b$

Primjer 5

Izračunaj vrijednost izraza:

a) $(-14) + (-28) + (+40)$

b) $125 - (-49) - (+25)$

Rješenje:

a) $(-14) + (-28) + (+40) = -14 - 28 + 40 = -42 + 40 = -2$

b) $125 - (-49) - (+25) = 125 + 49 - 25 = 174 - 25 = 149$

Ako ispred zagrada u jednom izrazu stoji znak +, tada se taj znak i zagrada ispred koje stoji izostavljaju (brišu), a sve ostalo ostaje isto.

Ako ispred zagrada u jednom izrazu stoji znak -, tada se taj znak i zagrada brišu, a znakovi ispred brojeva u toj zagradi mijenjaju se u suprotne (od + u - i od - u +).

Zadatak 3

Zbir brojeva (-62) i $(+130)$ pomnoži s njihovom razlikom.

Primjer 5

Odredi vrijednost sljedećeg brojnog izraza: $|-8| + 3 \cdot |-5| - 12$.

Rješenje:

U datom izrazu $|-8| + 3 \cdot |-5| - 12$ prvo izračunavamo apsolutne vrijednosti:

$|-8| = 8$ i $|-5| = 5$. Zatim u izraz uvrštavamo te vrijednosti: $8 + 3 \cdot 5 - 12$.

Prvo se izvršava množenje kao operacija višeg reda, dobija se $8 + 15 - 12$.

Zatim se sabiranje i oduzimanje izvode s lijeva nadesno: $23 - 12 = 11$.

Dakle: $|-8| + 3 \cdot |-5| - 12 = 8 + 15 - 12 = 23 - 12 = 11$.

Zadatak 4

Izračunaj vrijednost izraza $|9 - 11| \cdot 16 - (46 - 2 \cdot (-13)) - |-123|$.

Primjer 6

Razliku najvećeg dvocifrenog cijelog negativnog broja i najmanjeg dvocifrenog cijelog pozitivnog broja pomnoži s najmanjim trocifrenim cijelim negativnim brojem.

Rješenje:

Prvo pišemo brojeve prema uslovu za svaki broj: Najveći dvocifreni cijeli negativni broj je -10 ,

najmanji dvocifreni cijeli pozitivni broj je 10 , a najmanji trocifreni cijeli negativni broj je -999 .

Zatim zapisujemo i računamo izraz:

$((-10) - (+10)) \cdot (-999) = (-10 - 10) \cdot (-999) = (-20) \cdot (-999) = 19\,980$.

Zadatak 5

Razliku brojeva 200 i -426 umanj za količnik brojeva -360 i -12 .

Zadatak 6

Bojan je igrao 7 puta istu igru i osvojio $+13$, -8 , -16 , $+10$, $+4$, $+18$ i -7 bodova. Izračunaj koliko je bodova u prosjeku osvojio Bojan po jednoj igri.

Zadatak 7

Dejan radi kao inženjer na visokoj zgradi čiji su spratovi označeni brojevima od -3 do 18 . On treba da nadgleda rad na svim spratovima i više puta se vozi liftom, gore i dolje. Počevši od 11 . sprata, spušta se 3 puta po 4 sprata naniže, a zatim se penje 2 puta po 5 spratova naviše. Na kojem spratu je sada Dejan?

Zadatak 8

Vesna na svojoj kartici ima zaostale račune za mobilni telefon za mjesec januar, februar i mart od po 963 dinara koje treba da plati, ali nakon plaćanja prima uplatu od 7800 dinara na karticu za obavljanje obavezu. Zapiši izraz za izračunavanje stanja na Vesninoj kartici koristeći cijele brojeve i izračunaj ga.

Zadatak 9

Štedionica pravi završni obračun na kraju godine. Ona duguje 45 klijenata po $12\,300$ dinara, a od 62 klijenta potražuje po $10\,450$ dinara i od 213 klijenata potražuje po 3500 dinara. Kakav je rezultat završnog obračuna, da li štedionica završava godinu s dobiti?

Ako u brojnom izrazu imamo kombinaciju apsolutnih vrijednosti i operacija kao što su sabiranje, oduzimanje, množenje i dijeljenje, kako treba da primjenjujemo pravila redoslijeda operacija kako bi dobili tačan rezultat. Da li postoje situacije kada primjena apsolutne vrijednosti može promijeniti brojčanu vrijednost izraza i kako to utiče na konačni rezultat?

U svoju svesku odgovori na sljedeća pitanja:

1. Šta sam danas naučio? (Kratak opis osnovnog koncepta koji si razumio).
2. Šta mi je bilo najteže? (Prepoznavanje problema ili pojmova koji su bili teži).
3. Kako ću primijeniti ove informacije u budućnosti? (Kako vidiš praktičnu primjenu naučenog).

Ocijeni sebe po skali:

- 5 – Odlično, potpuno razumijem i mogu primijeniti što sam naučio.
- 4 – Dobro, ali trebam malo ponavljanja da bih bio siguran.
- 3 – Razumio sam dio materijala, ali moram se više potruditi.
- 2 – Još mnogo stvari ne razumijem.
- 1 – Ne razumijem ništa od onoga što je objašnjeno.

Na kraju možeš napraviti kratko dijeljenje s nastavnikom ili s drugom/ drugaricom o tome da li imaš pitanja ili šta ti je bilo najkorisnije iz lekcije.

Samostalni rad

1. Nađi vrijednost brojnih izraza:

a) $(-21) + (-1) \cdot (+42) - (+24) : (-8)$ b) $(-32) : (+8) - (+12) + (-21) : (+3)$

2. Izračunaj vrijednost izraza, prethodno se oslobodi zagrada:

a) $(-18) : (+3) - (-5) + (-17) \cdot (+2)$ b) $-3 - (2 + 4 - 9 - 1)$

3. Izraz zapiši pomoću zagrada tako da mu se ne promijeni vrijednost:

a) $-15 \cdot 3 - 48 + 2 \cdot 30 - 0 : 11$

b) $-57 - 18 : 3 + 2 \cdot 17 - 6$

4. Izračunaj razliku između proizvoda brojeva -10 i 9 i količnika brojeva -99 i -33 .

5. Izračunaj:

a) $-12 : 6 - 5 \cdot [14 - (2 - 5)]$ b) $(4 - 9) \cdot 3 - 28 : [-13 - 2 \cdot (-3)]$

6. Izračunaj $(3a + b) : c$ ako je $a = -13$, $b = -69$, $c = -6$.

7. Nađi brojčanu vrijednost izraza:

a) $(+1) : (-1) + (-2) : (-1) + (+3) : (-1)$ b) $(2 - 18) : [(-2) : 1]$

Stepen sa pokazateljem prirodan broj

U svakodnevnom životu često se susrećemo s velikim brojevima, posebno u matematici, prirodnim naukama i tehnologiji. Umjesto da ih zapisujemo kao brojeve s velikim brojem cifara, koristimo kraći zapis pomoću operacije stepenovanja.

U ovoj lekciji ćeš naučiti: šta znači stepenovanje i kako se koristi; šta predstavljaju osnova, pokazatelj i vrijednost stepena te kako da izračunaš vrijednost stepena kada je pokazatelj prirodan broj. Ovo znanje je osnova za kasnije matematičke koncepte kao što su množitelji, kvadratni i kubni brojevi.





Primjer 1

Ana želi napraviti ogradu za svoj cvjetni vrt. Odlučila je koristiti drvene stubove, postavljajući po 3 stuba u svaki red, a redovi se ponavljaju 7 puta.

- Zapiši koliko ukupno stubova će Ana iskoristiti kao zbir jednakih sabiraka.
- Zapiši izraz kao množenje.

Rješenje:

- Pošto u svakom redu ima 3 stuba, a red se ponavlja 7 puta, ukupni broj stubova možemo zapisati kao zbir jednakih sabiraka: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
- Isti proračun možemo predstaviti kao množenje: $7 \cdot 3 = 21$
Ako Ana napravi istu ogradu za 5 takvih cvjetnih vrtova, koliko stubova će joj biti potrebno?

Zadatak 1

U biblioteci je bilo 12 polica i na svakoj polici je bilo po 50 knjiga. Tokom jedne sedmice 15 učenika je uzelo po 2 knjige. Koliko knjiga ima u biblioteci nakon što su učenici uzeli knjige koje su im trebale?

Primjer 2

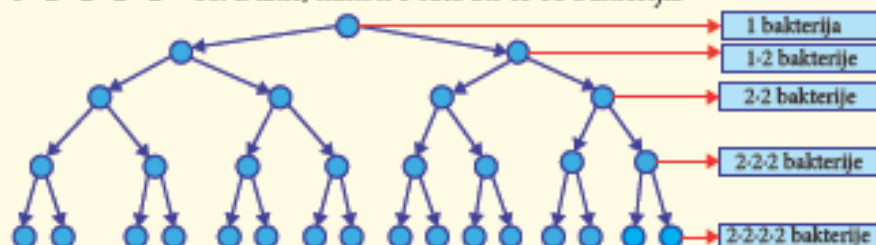
Naučnici proučavaju novu vrstu bakterija koje se dijele na dvije svake 15 minuta. Istraživanje počinje s jednom jedinom bakterijom.

- Zapiši pomoću množenja koliko bakterija će biti nakon 1 sat.
- Prikaži broj bakterija nakon 1 sat kao stepen.
- Ako se ovo dijeljenje nastavi nepromijenjeno 3 sata, zapiši konačni broj bakterija kao stepen i izračunaj njegovu vrijednost.



Rješenje:

- Pošto se bakterija udvostručuje svakih 15 minuta, u 1 satu (60 minuta) desit će se 4 podjele: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Dakle, nakon 1 sata bit će 16 bakterija.



b) Kraće, množenje četiri dvojke možemo zapisati kao stepen: $2^4 = 16$.

c) Ako proces traje 3 sata, u ta 3 sata desit će se ukupno $3 \cdot 4 = 12$ podjela.

Ukupan broj bakterija bit će: 2^{12} .

Računajući vrijednost: $2^{12} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4096$. Dakle, nakon 3 sata broj bakterija bit će 4096.

Množenje istog broja više puta zove se stepen i zapisuje se $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-PUTA}} = a^n$.

Broj a^n , gdje je $n \in \mathbb{N}_0$, naziva se stepen s osnovom a i stepenim pokazateljem (eksponentom) n .

Računanjem $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ dobija se vrijednost stepena a^n . Postupak izračunavanja vrijednosti stepena naziva se stepenovanje. Po dogovoru, za svaki broj a važi da je $a^0 = 1$, a operacija stepenovanja ima prednost nad operacijom množenja, pa umjesto $m \cdot (a^n)$ pišemo $m \cdot a^n$.

U primjeru 2 pod b, $2^4 = 16$, broj 2 je osnova stepena, 4 je stepenov pokazatelj, a 16 je vrijednost stepena.

Zapiši osnovu, stepenov pokazatelj i vrijednost stepena pod c.

Zadatak 2

Marko i Petar učestvuju u matematičkom takmičenju gdje treba da naprave sopstveni sistem mjerenja dužine koristeći stepenovanje. Oni odlučuju da osnovna jedinica dužine bude 1 korak, a svako sljedeće povećanje rastojanja biće tri puta veće od prethodnog.

- Zapiši rastojanje po svakom sljedećem koraku za prvih pet nivoa koristeći množenje.
- Prikaži isto rastojanje koristeći stepene broja 3.
- Ako osmi nivo predstavlja ukupno pređeno rastojanje, iskaži to rastojanje stepenom i izračunaj njegovu vrijednost.

Zadatak 3

Zapiši prvih 10 stepena broja 10 s eksponentom prirodan broj i izračunaj njihove vrijednosti. Šta primjećuješ?

Primjer 3

Marko odlučuje da posadi 3 cvijeta prve sedmice, a svake naredne sedmice da udvostruči broj novo zasađenih cvjetova u odnosu na prethodnu sedmicu.

- Zapiši koliko novih cvjetova će Marko posaditi tokom prvih 6 sedmica množenjem.
- Prikaži broj novoposađenih cvjetova svake sedmice koristeći stepen.
- Izračunaj koliko ukupno cvjetova će Marko posaditi nakon 6 sedmica.

Rješenje:

- Budući da Marko udvostručuje broj cvjetova svake sedmice, dobijamo:
 $3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.
 Broj cvjetova po sedmicama je: 3, 6, 12, 24, 48, 96.
- Isto možemo zapisati stepenovanjem: $3, 3 \cdot 2^1, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 3 \cdot 2^4, 3 \cdot 2^5$.
- Da bismo izračunali ukupan broj posadenih cvjetova nakon 6 sedmica, sabiramo broj cvjetova iz svake sedmice i imamo: $3 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$
 Znači, nakon 6 sedmica Marko će imati posađeno ukupno 189 cvjetova.

Zadatak 4

Emilija radi u maloj fabrici koja proizvodi i pakuje kutije. Ona počinje s 5 pakovanja kutija prvog dana, a svaki sljedeći dan pravi trostruko više pakovanja nego prethodnog dana.

- Zapiši koliko pakovanja kutija će Emilija napraviti tokom prva 4 dana množenjem.
- Prikaži broj napravljenih pakovanja za svaki dan koristeći stepen.
- Izračunaj ukupno koliko pakovanja kutija će Emilija napraviti nakon 4 dana.

Kako bi opisao razliku između stepena s različitim osnovama i istim pokazateljima (na primjer, 2^3 i 3^3) i kakve su njihove vrijednosti? Šta bi se desilo ako osnova ostane ista, a mijenja se samo pokazatelj? Prikaži postupak računanja i objasni kako stepeni s različitim pokazateljima utiču na vrijednost stepena.

Ocijeni svoje znanje.

- Da li mogu objasniti šta je stepen i koje su njegove komponente (osnova i pokazatelj)?
 - Ne mogu objasniti
 - Mogu objasniti uz pomoć nastavnika
 - Mogu objasniti samostalno

2. Da li mogu pravilno zapisati stepen s prirodnim pokazateljem za različite osnove?
 - 1 = Ne mogu zapisati stepen
 - 2 = Mogu zapisati stepen, ali ponekad pravim greške
 - 3 = Mogu zapisati stepen tačno i brzo
3. Da li mogu izračunati vrijednost stepena s pokazateljem prirodan broj?
 - 1 = Ne mogu izračunati
 - 2 = Mogu izračunati uz pomoć
 - 3 = Mogu izračunati samostalno i tačno
4. Da li mogu primijeniti stepene u kontekstu iz svakodnevnog života, na primjer, pri rastu populacije i slično?
 - 1 = Ne mogu povezati stepen sa svakodnevnim kontekstom
 - 2 = Mogu uz pomoć primjera
 - 3 = Mogu samostalno primijeniti stepen u različitim situacijama
5. Da li razumijem kako stepeni s velikim pokazateljima rastu vrlo brzo i zašto je to važno u matematici?
 - 1 = Ne razumijem
 - 2 = Razumijem djelimično
 - 3 = Razumijem potpuno i mogu objasniti

Ako ti je većina odgovora 3, to znači da si uspješno postigao sve standarde iz lekcije.

Ako imaš više odgovora ispod 2, možda ti treba ponavljanje nekih dijelova lekcije.

Ako si većinu odgovora dao ispod 1, posavjetuj se s nastavnikom za dodatnu pomoć i vježbe.

Samostalni rad

1. Zapiši kao stepen proizvode:
 - a) $7 \cdot 7 \cdot 7$
 - b) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$
 - c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$
2. Prikaži kao proizvod stepene:
 - a) 5^4
 - b) $(-3)^5$
 - c) $(x + y)^3$
3. Izračunaj vrijednost stepena:
 - a) 5^4
 - b) $(-10)^5$
 - c) 3^4
4. Izračunaj vrijednost izraza:
 - a) $2^3 - 3^3$
 - b) $5^3 \cdot (-3)^4 + 2^2 - (-7)^2$
 - c) $2^4 \cdot 3^2 + 5^2 : 5^2$

5.* Proveri šta je tačno:

- a) $(-2)^{11} < 0$ b) $(-2)^{22} > 0$ c) $-2^{22} > 0$ d) $(-5)^3 \cdot (-7)^3 > 0$
e) $a^3 \cdot b^3 > 0$, za $a > 0, b > 0$ f) $a^3 \cdot b^3 < 0$, za $a < 0, b < 0$

6. Za koje prirodne brojeve n važi svaki od sljedećih matematičkih izraza?

- a) $1^n = 1$ b) $0^n = 0$ c) $2^n > 0$ d) $(-3)^n > 0$ e) $(-5)^n < 0$

7. Za koju vrijednost n je tačno:

- a) $2^n = 16$ b) $(-3)^n = -27$

8. Jedan USB-uređaj ima kapacitet od 2^4 gigabajta. Koliko gigabajta ima uređaj?

9. Bakterija se udvostručuje svaki sat. Ako na početku ima 3 bakterije, koliko bakterija će biti nakon 5 sati?

- a) Zapiši koristeći stepene brojni izraz za dobijanje broja bakterija nakon 5 sati.
b) Zapiši koliki će biti broj bakterija nakon n - sati.

Kvadrati i kvadratni korijeni do 100

Znanje koje ćeš steći obradom ove lekcije osnova je za dalje učenje matematičkih koncepata i pomoći će ti u rješavanju različitih zadataka i problema. Naučit ćeš kako da prepoznaš kvadrate i da izračunaš njihove kvadratne korijene, kao i da koristiš ove vještine u svakodnevnom životu i u daljem učenju matematike.



Primjer 1

Mehmedov otac imao je dva magacina. U prvom magacinu bilo je 425 kg brašna, a u drugom je bilo 3 puta više nego u prvom. Otac je prodao 40% od ukupne količine brašna iz magacina. Koliko ukupno brašna je ostalo u magacinima?

Rješenje:

Količina brašna u drugom magacinu je: $3 \cdot 425 = 1275$ kg. Znači, u drugom magacinu ima 1275 kg brašna.

Ukupna količina brašna u oba magacina je: $425 \text{ kg} + 1275 \text{ kg} = 1700 \text{ kg}$.

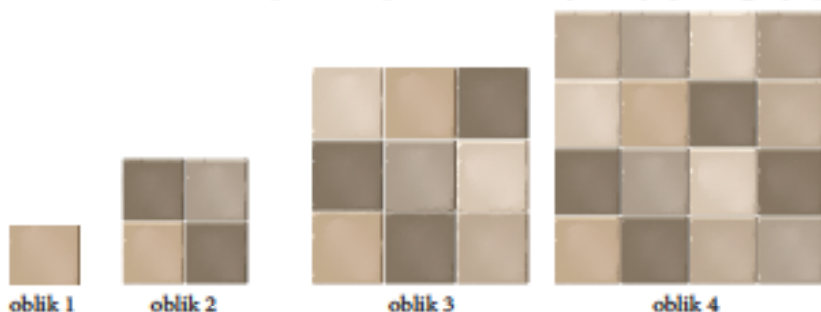
Količina brašna koja je bila prodana (40% od ukupne količine) je: $40\% \text{ od } 1700 \text{ kg} = 0,4 \cdot 1700 = 680 \text{ kg}$. Mehmedov otac je prodao 680 kg brašna.

U oba magacina, nakon prodaje, ostalo je: $1700 \text{ kg} - 680 \text{ kg} = 1020 \text{ kg}$.

Ukupno je u magacinima ostalo 1020 kg brašna.

Primjer 2

Janko slaže kvadratne pločice u parku. Oblik koji dobija pri slaganju prikazan je na slici.



- Zapiši ukupan broj pločica koje su iskorištene u svakom obliku posebno.
- Zapiši broj upotrijebljenih pločica u svakom obliku kao stepen broja.
- Koliko pločica će imati peti, šesti i sedmi oblik?

Rješenje:

- U obliku 1 ima 1 pločica, u obliku 2 ima 4 pločice, u obliku 3 ima 9 pločica, a u obliku 4 ima 16 pločica.
- Broj upotrijebljenih pločica u svakom obliku, zapisan kao stepen broja, je:
 $1^2 = 1$, čita se „1 na kvadrat je jednako 1“
 $2^2 = 4$, čita se „2 na kvadrat je jednako 4“
 $3^2 = 9$, $4^2 = 16$
- Iz slaganja oblika može se primijetiti da je u svakom od njih broj redova jednak broju pločica u jednom redu. Tako će u petom obliku biti $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ pločica, u šestom $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$, a u sedmom $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$ pločica.
 Brojevi 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... nazivaju se puni kvadrati ili kvadratni brojevi.

Broj koji se može zapisati kao proizvod dva ista množitelja (cijela broja) naziva se pun kvadrat ili kvadratni broj.

Zadatak 1

Zapiši sve pune kvadrate od 1 do 100.

Zadatak 2

- a) Koliko iznosi deveti puni kvadrat? b) Da li je 68 puni kvadrat nekog broja?

Primjer 3

Dat je kvadratni broj 64. Kojeg je broja kvadrat 64?

Rješenje:

Da bismo odgovorili na pitanje, treba da pronademo koji broj pomnožen sam sa sobom daje proizvod 64. Postoje dva takva broja: $+8$ i -8 , jer je $8^2 = 64$ i $(-8)^2 = 64$.

Za sada ćemo se zadržati samo na pozitivnim (prirodnim) brojevima i njihovim kvadratima.

Zapišemo: $\sqrt{64} = 8$ (čita se „kvadratni korijen od broja 64 jednak je 8“).

Slično kao u primjeru 3, takođe je: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, ...

Broj b naziva se kvadratni korijen broja a ako $b^2 = a$ (pišemo $b = \sqrt{a}$).

Zadatak 3

Zapiši kvadratne korijene brojeva: 16, 25, 36, 49, 64, 81 i 100.

Zadatak 4

Zapiši sljedeće brojeve kao zbir dva kvadratna broja:

- a) 13 b) 29 c) 45

Primjer 4

Marko ima dvorište u obliku kvadrata sa površinom od 49 kvadratnih metara. Kolika je stranica dvorišta?

Rješenje:

Zapravo, zadatak traži da se odredi kvadratni korijen broja 49.

Pošto je $7 \cdot 7 = 49$, proizlazi da je dužina stranice Markovog dvorišta 7 m.

Zadatak 5

Tri sobe u stanu porodice Jankovski imaju oblik kvadrata s površinom: 25 m^2 , 36 m^2 i 16 m^2 . Koliki je perimetar svake sobe?

Mile kaže da puni kvadrat nikada ne završava na 3. Da li je u pravu? Objasni.

U svoju svesku zapiši odgovore na pitanja:

1. Mogu li da prepoznam kvadratne brojeve do 100? (Da/Ne)
2. Mogu li da nađem kvadratni korijen kvadratnog broja? (Da/Ne)
3. Mogu li da primijenim koncept kvadratnih brojeva u realnim primjerima (na primjer, izračunavanje površine kvadratnih objekata)? (Da/Ne)

Samostalni rad

1. Izračunaj:
a) $\sqrt{225}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt{400}$
2. Ako je $x^2 = 81$, koje su moguće vrijednosti za x ?
3. Jovan želi ograditi baštu u obliku kvadrata s površinom od 144 m^2 . Kolika je dužina stranice bašte? Proračunaj koliko metara žice će Jovan trebati da ogradi baštu.
4. Ako bašta u obliku kvadrata ima stranicu 11 m, kolika je njena površina?
- 5.* Formula za proračunavanje udaljenosti odjeka zvuka je $d = \sqrt{t}$, gdje je d udaljenost u metrima, a t vrijeme u sekundama. Ako se eho vrati za 9 sekundi, kolika je udaljenost do prepreke?
6. Marija želi kupiti tepih koji će prekriti cijeli pod u kvadratnoj dječjoj sobi. Ona zna da soba ima površinu od 81 m^2 . Želi znati kolika treba biti dužina tepiha da pokrije cijeli pod.
7. Radnik u magacinu treba poređati 225 jednakih kutija u obliku kvadrata (isti broj kutija po redu i po koloni). U koliko redova i kolona su poređane kutije?
8. U školi su učenici zasadili 256 ukrasnih cvjetova tako da formiraju kvadrat, s jednakim razmakom i istim brojem redova i kolona. Koliko cvjetova ima u svakom redu?

Upoređivanje razlomaka

Kao način za predstavljanje dijelova cjeline koriste se razlomci.

U svakodnevnom životu često trebaš porediti razlomke, na primjer, kada porediš ko je pojeo veći dio pice ili ko je prešao veći dio puta.

Da bi mogao pravilno porediti razlomke, trebaš razumjeti šta treba uraditi da bi ih lakše uporedio. U ovoj lekciji podsjetit ćeš se na neke od načina za poređenje i uređivanje razlomaka koje si učio u šestom razredu:

- Svođenje na isti imenitelj
- Svođenje na isti brojilac
- Korištenje dijagrama – vizuelno poređenje veličine razlomaka

Takode, naučićeš porediti razlomke prethodnim pretvaranjem u decimalne brojeve. Korištenjem jedne od ovih strategija moći ćeš tačno odrediti koji razlomak je veći ili manji i poredati ih po veličini.



Primjer 1

Jasmina mnogo voli čokoladu. Kako treba da bira u svakom od zadataka pod a, b i c da bi uzela veći komad?

- a) Jedan komad je $\frac{6}{10}$ čokolade, a drugi je $\frac{7}{10}$ čokolade.
- b) Jedan komad je $\frac{5}{8}$ čokolade, a drugi je $\frac{5}{16}$ čokolade.
- c) Jedan komad je $\frac{3}{7}$ čokolade, a drugi je $\frac{7}{10}$ čokolade.

Rješenje:

- a) Čokolada je podijeljena na jednake dijelove, ali veći je komad čokolade onaj koji ima više dijelova, odnosno komad čokolade sa sedam dijelova. Dakle, Jasmina će izabrati komad koji je $\frac{7}{10}$ od čokolade, jer je $\frac{7}{10} > \frac{6}{10}$.
- b) Kod razlomaka $\frac{5}{8}$ i $\frac{5}{16}$ dobija se isti broj dijelova, ali različite veličine. Veći su oni dobijeni dijeljenjem čokolade na manji broj komada. Jasmina će izabrati komad koji je $\frac{5}{8}$ od čokolade. Dakle, $\frac{5}{8} > \frac{5}{16}$. Podsjetnik: Od dva razlomka sa istim brojiocima, veći je onaj koji ima manji imenilac.
- c) Kako ćeš uporediti razlomke? Sedmine su veće, ali ima više desetina. Poređenje ćemo uraditi pomoću postupka proširivanja razlomaka na zajednički imenilac.

Tako dobijamo: $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 10}{7 \cdot 10} = \frac{30}{70}$ i $\frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 7}{10 \cdot 7} = \frac{49}{70}$. Pošto je $\frac{49}{70} > \frac{30}{70}$, odnosno $\frac{7}{10} > \frac{3}{7}$.

Primjer 2Uporedi pomoću znakova $<$, $=$, $>$:

- a)
- $\frac{2}{3}$
- i 1 b)
- $\frac{7}{4}$
- i 1 c)
- $\frac{5}{5}$
- i 1

Rješenje:

- a) $\frac{2}{3}$ je pravi razlomak i znači dvije trećine od jedne cjeline, a 1 označava jednu cijelinu koja ima tri trećine. Zato $\frac{2}{3} < \frac{3}{3} < 1$.
- b) $\frac{7}{4}$ je nepravi razlomak, pa $\frac{7}{4} > 1$, jer $\frac{7}{4} > \frac{4}{4}$.
- c) $\frac{5}{5} = 1$. Zašto?

Svaki pravi razlomak je manji od 1, a svaki nepravi razlomak je veći ili jednak 1. Često se umjesto termina pravi razlomak koristi i izraz pravilni razlomak, ali oba termina imaju isto značenje.

Zadatak 1

Uporedi razlomke:

- a)
- $\frac{1}{13}$
- i
- $\frac{7}{11}$
- b)
- $\frac{3}{7}$
- i
- $\frac{3}{9}$
- c)
- $\frac{5}{14}$
- i
- $\frac{3}{8}$
- d)
- $\frac{4}{9}$
- i
- $\frac{7}{9}$
- e)
- $\frac{17}{24}$
- i
- $\frac{17}{19}$

Primjer 3Vanja je iskoristila $\frac{14}{20}$ cvijeća da napravi bukete, a Melek je iskoristila $\frac{3}{5}$ cvijeća.

- a) Zapiši razlomke kao decimalne razlomke.
- b) Zapiši decimalne razlomke kao decimalne brojeve.
- c) Koja od njih je iskoristila manje cvijeća da napravi bukete?

Rješenje:

- a) $\frac{14}{20} = \frac{14 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{70}{100}$. Razlomak proširujemo sa 5. Zašto?
Sada razlomak $\frac{3}{5}$ proširujemo sa 20. Zašto? $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100}$.
- b) $\frac{60}{100} = 0,60$ i $\frac{70}{100} = 0,70$.
Objasni zašto $\frac{6}{10} = \frac{60}{100} = \frac{600}{1000}$. Ako zapišemo razlomke kao decimalne brojeve, imamo: $0,6 = 0,60 = 0,600$.
- Isto tako, $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$ ili $0,70 = 0,7$. Dobijeni broj 0,70 možemo zapisati kao 0,7. Zašto?
- c) Pošto je $0,7 > 0,6$, znači $\frac{14}{20} > \frac{3}{5}$. Dakle, Vanja je iskoristila više cvijeća od Melek.

Oдавде možemo zapisati dva svojstva decimalnih brojeva:

Decimalni broj se ne mijenja ako se s njegove desne strane, nakon posljednje decimalne, dodaju nule.

Decimalni broj se ne mijenja ako se s njegove desne strane izostave nule poslije kojih nema nenulih cifara.

Primjer 4

Kole je kupio $\frac{2}{5}$ kg krompira i $\frac{3}{8}$ kg luka. Šta je Kole kupio više?

Rješenje:

Znaš da razlomak crta znači dijeljenje. Dijeljenjem brojilaca s imeniteljima možeš zapisati razlomak kao decimalni broj.

Imamo $\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4$ i $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,375$. Sada trebaš uporediti dva decimalna broja. To si učio u šestom razredu. Decimalni broj 0,4 ima više desetinki od decimalnog broja 0,375. Znači $0,4 > 0,375$, odnosno $\frac{2}{5} \text{ kg} > \frac{3}{8} \text{ kg}$. Kole je kupio više krompira.

Kada znaš svojstva decimalnih brojeva, da bi ih uporedio, možeš ih zapisati s istim brojem decimala, odnosno $0,4 = 0,400$. Imaš $0,400 > 0,375$, odnosno $\frac{2}{5} \text{ kg} > \frac{3}{8} \text{ kg}$.

Pri poređenju razlomaka, možeš ih prethodno zapisati kao decimalne brojeve tako što ćeš brojilac podijeliti imeniteljem, a zatim porediti decimalne brojeve.

Zadatak 2

Uporedi razlomke nakon što ih prethodno zapišeš kao decimalne brojeve:

- a) $\frac{17}{50}$ i $\frac{7}{20}$ b) $\frac{103}{1000}$ i $\frac{1}{8}$ c) $\frac{4}{125}$ i $\frac{8}{25}$ d) $\frac{19}{8}$ i $2\frac{2}{5}$

Primjer 5

Na školskom sportskom takmičenju četiri učenika učestvovala su u trci i istrčala različite dijelove staze prije nego što su stali da se odmore. Dužina staze je ista za sve, a rezultati su:

Jana je istrčala $\frac{3}{5}$ od staze, Marko je istrčao $\frac{1}{8}$ od staze, Ivana je istrčala $\frac{3}{4}$ od staze, a Petar je istrčao $\frac{5}{10}$ od staze.

- Koji učenik je istrčao najveći dio staze?
- Koji učenik je istrčao najmanji dio staze?
- Poredaj rezultate učenika od onoga koji je istrčao najmanje do onoga koji je istrčao najviše.

Rješenje:

Razlomke zapisujemo kao decimalne brojeve:

$$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0,6 = \text{Uz korištenje prvog svojstva} = 0,600$$

$$\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0,125 \quad \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75 = 0,750 \quad \frac{5}{10} = 5 : 10 = 0,5 = 0,500$$

Sada upoređujemo dobijene decimalne brojeve:

$$0,125 < 0,5 < 0,6 < 0,75$$

- a) Ivana je istrčala najveći dio staze.
 b) Marko je istrčao najmanji dio staze.
 c) $\frac{1}{8} < \frac{5}{10} < \frac{3}{4} < \frac{3}{4}$

Zadatak 3

Jedan majstor može završiti posao za 8 sati, a drugi za 5 sati.
 Koliki dio posla može završiti svaki od njih za 1 sat?
 Ko od njih može završiti više posla za 6 sati?

Zadatak 4

Poredaj $\frac{39}{50}$; 0,45 ; $\frac{1}{2}$; 1,67; 0,005; $\frac{18}{25}$; $\frac{4}{5}$ počevši od najmanjeg.

Zašto je važno da znamo kako da upoređujemo i da poredimo razlomke u svakodnevnom životu?
 Možeš li navesti primjer iz stvarnog života gdje bi ti ovo znanje bilo korisno?

Odgovori u svesku na sljedeća pitanja da procijeniš svoj rad:

1. Koliko dobro razumijem šta je razlomak i kako ga mogu uporediti sa drugim razlomkom?
2. Da li mi je jasno kako da poredam razlomke?
3. Da li sam uspio primijeniti strategije za poređenje razlomaka u praktičnim zadacima? (napiši kratko)

Koristi skalu od 1 do 5, gdje:

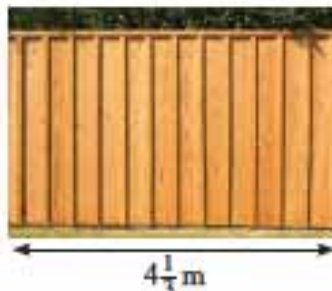
- 1 – Nisam ništa razumio.
- 2 – Razumio sam nešto, ali imam mnogo pitanja.
- 3 – Razumio sam dio lekcije, ali nešto mi je nejasno.
- 4 – Dobro sam razumio, ali treba da vježbam više.
- 5 – Potpuno razumijem lekciju i mogu je primijeniti.

Samostalni rad

- Uporedi razlomke: a) $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{7}$ i $\frac{3}{7}$ c) $\frac{4}{9}$ i $\frac{8}{9}$ d) $\frac{12}{17}$ i $\frac{13}{17}$ e) $\frac{36}{47}$ i $\frac{21}{47}$
- Uporedi razlomke: a) $\frac{3}{5}$ i $\frac{3}{7}$ b) $\frac{7}{12}$ i $\frac{7}{6}$ c) $\frac{10}{10}$ i $\frac{10}{20}$ d) $\frac{41}{38}$ i $\frac{41}{38}$ e) $\frac{258}{300}$ i $\frac{258}{100}$
- Svedi razlomke na najmanji zajednički imenilac:
a) $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$ b) $\frac{7}{12}$ i $\frac{13}{15}$ c) $\frac{11}{15}$ i $\frac{31}{35}$ d) $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{15}$ i $\frac{1}{20}$ e) $\frac{11}{18}$, $\frac{31}{72}$, $\frac{5}{9}$ i $\frac{29}{36}$
- Poredaj razlomke po veličini, počevši od najmanjeg, odvojene znakom <:
a) $\frac{12}{18}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{3}{18}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{14}{18}$, $\frac{7}{18}$ i $\frac{10}{18}$
b) $\frac{13}{15}$, $\frac{13}{9}$, $\frac{13}{28}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{13}{17}$, $\frac{13}{128}$, $\frac{13}{12}$ i $\frac{13}{44}$
c) $\frac{8}{140}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{21}$, $\frac{31}{35}$, $\frac{58}{60}$ i $\frac{253}{420}$
- Jedan radnik završio je krov za $\frac{1}{3}$ dana, a sljedećeg dana napravio je još jedan krov na koji je potrošio $\frac{3}{8}$ dana. Koji krov je radio duže?
- Moler je krečio jedan zid 3 dana. Prvog dana završio je $\frac{1}{3}$ zida, drugog dana $\frac{4}{12}$ zida, a trećeg dana $\frac{14}{30}$ zida. Koji dan je moler završio najmanji dio zida, a koji dan najveći?
- Jedan krojač može iskrojiti odjevni predmet za 5 sati, a drugi za 7 sati. Ko je iskrojio više materijala ako je prvi krojač radio 4 sata, a drugi sat duže?
- Tri dječaka imaju jednaku sumu novca. Prvi dječak potrošio je $\frac{4}{5}$ sume, drugi $\frac{13}{15}$, a treći dječak potrošio je $\frac{17}{21}$ novca. Ko je potrošio najviše, a ko najmanje novca?
- Jedan rezervoar za vodu puni se iz dvije cijevi. Prva cijev može napuniti rezervoar za 8 sati, dok je drugoj potrebno 11 sati da ga napuni. Ako je prva cijev bila otvorena 3 sata, a druga 4 sata, koja od njih je napunila veći dio rezervoara?
- Radi štednje vode, Nebojša skuplja kišnicu u buradima kapaciteta 1 kilolitar. U prvo bure napunio je 0,34 kl, u drugo bure $\frac{4}{5}$, u treće bure $\frac{1}{8}$, a u četvrto bure 0,6 kl. U kojem buretu ima najviše, a u kojem najmanje kišnice?

Periodični decimalni brojevi

U svakodnevnom životu često dolazimo u situaciju kada treba da pretvorimo decimalne brojeve u razlomak ili obrnuto. Naprimjer, koliko centimetara je dugačko parče ograde za dvorište ako je u metrima izraženo kao $4\frac{1}{3}$ m. Kada bismo ovaj mješoviti broj pretvorili u decimalni, dobili bismo broj koji sadrži 4 cijela i 3 kao decimalu koja se stalno ponavlja, a dijeljenje se ne završava. Za razliku od $4\frac{1}{3}$, broj $4\frac{3}{5}$ pretvoren u decimalni je 4,6, odnosno ima konačan broj decimala.



U ovoj lekciji naučićeš kako da zapisuješ i imenuješ decimalne brojeve bez obzira na broj decimalnih mjesta koje imaju, a dobijeni su pri dijeljenju bilo koja dva broja. Ovim znanjem ćeš poboljšati svoju sposobnost za rad sa decimalnim brojevima i moći ćeš lako da rješavaš zadatke s njima.

Primjer 1

- Koji broj je veći: 3,45 ili 3,54?
- Koji broj je manji: 6,27 ili 6,72?
- Koji broj je najveći: 2,85; 2,58 ili 2,95?
- Poredaj brojeve od najmanjeg do najvećeg: 4,6; 4,16; 4,61.

Rješenje:

- $3,54 > 3,45$
- $6,27 < 6,72$
- Najveći je broj 2,95
- $4,16 < 4,6 < 4,61$

Objasni odgovor na svako pitanje.

Zadatak 1

Broj 18,356248 zaokruži:

- na jednu decimalu
- na dvije decimale
- na četiri decimale

Primjer 2

U četiri kutije ima različita količina narandži: $\frac{3}{8}$ kg, $\frac{7}{9}$ kg, $\frac{40}{27}$ kg, $\frac{7}{12}$ kg

- Zapiši svaku količinu narandži kao decimalni broj.
- Objasni šta primjećuješ.

Rješenje:

a) $\frac{3}{8} : 8 = 0,375$

$$\begin{array}{r} 30 \\ -24 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ -40 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\frac{7}{9} : 9 = 0,77777...$

$$\begin{array}{r} 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 70 \\ -63 \\ \hline 7 \end{array}$$

$\frac{40}{27} : 27 = 1,481481...$

$$\begin{array}{r} 40 \\ -27 \\ \hline 130 \\ -108 \\ \hline 220 \\ -216 \\ \hline 40 \\ -27 \\ \hline 130 \\ -108 \\ \hline 220 \\ -216 \\ \hline 40 \\ -27 \\ \hline 13 \end{array}$$

$\frac{7}{12} : 12 = 0,58333...$

$$\begin{array}{r} 70 \\ -60 \\ \hline 100 \\ -96 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 40 \\ -36 \\ \hline 4 \end{array}$$

Pri dijeljenju 3 i 8 za razlomak $\frac{3}{8}$, dijeljenje se završava, odnosno dobiva se ostatak 0.

Dobijeni broj je decimalni broj koji se još naziva **konačni decimalni broj**. Kod svakog drugog razlomka, pri dijeljenju brojioca i imenioca, dijeljenje se ne završava. Bez obzira koliko nula dodavali, ne dobija se ostatak 0, odnosno dijeljenje se nastavlja do beskonačnosti.

Dobijeni decimalni brojevi imaju beskonačno mnogo decimala i zato ih zovemo **beskonačni decimalni brojevi**.

Beskonačni decimalni brojevi 0,77777... i 1,481481... imaju jednu cifru (7) ili grupu cifara (481) koje se ponavljaju istim redoslijedom odmah nakon decimalnog zareza.

Takvi decimalni brojevi se zovu čisto periodični decimalni brojevi. Niz cifara koja se ponavlja u decimalnom broju zove se **period**.

Kod beskonačnog decimalnog broja 0,58333..., dobijenog dijeljenjem 7 i 12, ponavljanje cifre ili grupe cifara istim redoslijedom ne počinje odmah poslije decimalnog zareza.

Takvi decimalni brojevi se zovu mješovito **periodični decimalni brojevi**.

	Čisto periodični decimalni brojevi		Mješovito periodični decimalni brojevi
broj	0,777...	0,481481...	0,58333...
Čita se	0 cijelih i 7 u periodu	0 cijelih i 481 u periodu	0 cijelih, 58 stotinki i 3 u periodu
Zapisuje se	0,(7)	0,(481)	0,58(3)

U broju 0,58(3) grupa cifara 58 koja se nalazi ispred cifre 3 (perioda) naziva se **pretperiod**.

Uvođenjem decimalnih brojeva (konačnih i beskonačnih) možemo svaki prirodni broj podijeliti sa svakim prirodnim brojem, pri čemu se kao rezultat tog dijeljenja dobija konačan ili periodičan decimalni broj.

Pri dijeljenju dva broja može se dobiti:

1. Konačan decimalni broj.
2. Beskonačan decimalni broj, i to:
 - a) čisto periodičan decimalni broj (kada se odmah nakon decimalnog zareza ponavlja jedna cifra ili grupa cifara),
 - b) mješovito periodičan decimalni broj (kada ponavljanje cifre ili grupe cifara ne počinje odmah nakon decimalnog zareza).

Zadatak 2

Zapiši kao decimalne brojeve razlomke i odredi koje vrste je dobijeni decimalni broj:

- a) $\frac{37}{25}$ b) $\frac{12}{27}$ c) $\frac{625}{135}$ d) $\frac{152}{41}$ e) $\frac{20250}{1296}$ f) $\frac{19}{9}$

Primjer 3

Ana i Marko žele da naprave kolače. Prema receptu, potrebni su im $\frac{2}{5}$ litara mlijeka, $\frac{3}{4}$ kilograma brašna i $\frac{5}{6}$ kilograma šećera.

- a) Pretvori date razlomke u decimalne brojeve.
- b) Za svaki dobijeni decimalni broj objasni da li je konačan ili beskonačan decimalni broj.
- c) Ako mjerna čaša koju koriste ima oznake na svakih 0,1 litar, na koliko litara će zaokružiti broj koji pokazuje zapreminu mlijeka?
- d) Ako se na vagi može izmjeriti masa s preciznošću do 0,01 kg, na koliko kilograma će zaokružiti brašno i šećer?

Rješenje:

- a) Razlomci zapisani kao decimalni brojevi su: $\frac{2}{5} = 0,4$; $\frac{3}{4} = 0,75$ i $\frac{5}{6} = 0,8333\dots$
- b) 0,4 je konačan decimalni broj jer ima konačan broj cifara iza decimalnog zareza.
0,75 je konačan decimalni broj jer ima konačan broj cifara iza decimalnog zareza.
0,8333... je mješovito periodičan decimalni broj jer se cifra 3 ponavlja beskonačno mnogo puta, a njeno ponavljanje ne počinje odmah poslije decimalnog zareza.
- c) Pošto mjerna čaša od litra ima oznake na svakih 0,1 litar, 0,4 litra se može tačno izmjeriti. Dakle, nema potrebe za zaokruživanjem vrijednosti jer se već uklapa u ovu skalu.
- d) Brašno (0,75 kg) već ima dvije decimale, pa nije potrebno zaokruživanje na stotinke, dok šećer (0,8333...) treba zaokružiti na dvije decimale: 0,83 kg. Razmisli i objasni zašto u ovom slučaju ne zaokružujemo na 0,84?

Zadatak 3

Marija i Ivan mjerili su dužine različitih predmeta za svoj školski projekat. Evo njihovih mjerenja u metrima: dužina stola je $\frac{7}{8}$ m, visina stolice je $\frac{5}{4}$ m i dužina ukrasne trake je $\frac{2}{3}$ m.

- Pretvori date razlomke u decimalne brojeve.
- Odredi za svaki broj da li je konačan ili beskonačan decimalni broj.
- Ako Marija i Ivan koriste metar s oznakama na svakih 0,05 m, na koju najbližu oznaku će zaokružiti svaku dužinu?

Ako podijelimo 1 sa 3, dobijemo beskonačan periodični decimalni broj (0,3333...). Ako taj rezultat pomnožimo s 3, dobićemo 0,9999....

Ali znamo da $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$. Kako je moguće da je 0,9999... jednako 1? Šta misliš, zašto se to dešava? „Tri pitanja za razmišljanje“ u tvojoj svesci:

- Šta sam danas naučio o konačnim i beskonačnim decimalnim brojevima? (Napiši jednu–dvije rečenice.)
- Koji mi je zadatak bio najlakši, a koji najteži? Zašto? (Identifikuješ izazove.)
- Koliko se dobro osjećam u vezi s ovom lekcijom?
(Odlično | Dobro | Treba da vježbam više.)

Samostalni rad

1. Podijeli:

a) 2 : 3 b) 5 : 9 c) 2 : 11 d) 14 : 22 e) 16 : 27 f) 50 : 37 g) 8 : 54 h) 73 : 41

Da li su dobijeni brojevi čisto periodični ili mješovito periodični?

Odredi period svakog broja.

2. Pretvori razlomke u decimalne brojeve i za svaki odredi period i pretperiod, ako postoje.

a) $\frac{38}{9}$ b) $\frac{13}{15}$ c) $\frac{32}{28}$ d) $\frac{42}{36}$ e) $\frac{118}{123}$ f) $\frac{23}{37}$

3. Date brojeve zaokruži na jednu decimalu:

a) 0,147 b) 5,6(3) c) 14,009 d) 1,91556 e) 3,(5) f) 0,901 g) 26,863 h) 26,98

4. Date brojeve zaokruži na dvije decimale:

a) 6,06132 b) 0,009995 c) 153,0(5) d) 12,561999 e) 0,(9) f) 77,(7)
g) 9,0(173) h) 9,99(8)

Opisivanje, računanje i upoređivanje dijelova cjeline sa razlomcima i procentima

Razlomci i procenti su važan dio svakodnevnog života – koristićeš ih kada računaš popuste u prodavnicima, kada porediš rezultate, analiziraš nutritivni sastav hrane ili određuješ koliki dio nečega je iskorišten. U ovoj lekciji naučićeš kako da koristiš razlomke i procente da opišeš dijelove oblika, cjelina i mjera.



Istraživaćeš kako da izračunaš jednostavne procente od date cjeline i kako da izraziš dio nečega kao razlomak ili procenat. Takođe ćeš koristiti procente da porediš različite količine i da razumiješ njihovo značenje u realnim situacijama. Ovo znanje će ti pomoći da bolje razumiješ matematičke odnose oko sebe i da donosiš bolje odluke u svakodnevnom životu.

Primjer 1

Imaš dvije različite situacije u kojima treba da koristiš razlomke, decimalne brojeve i procente:
 Situacija 1: Sprovedena je anketa o omiljenom voću među 1100 učenika i dobijeni su sljedeći rezultati: 12 % učenika izabralo je jabuke, 14 % banane, 15 % narandže, 110 učenika nije izabralo voće, a ostali su izabrali neko drugo voće kao omiljeno.

Situacija 2: Park je popločan sa 141 000 pločica. U parku je 1410 pločica u dijelu za igralište.

- Pretvori date procente 12 %, 14 % i 15 % u razlomke.
- Odredi koliki procenat od ukupnog broja (1100) predstavlja 110 učenika koji nisu izabrali voće. Zapiši rezultat kao procenat i kao razlomak.
- Odredi koliki dio parka zauzima igralište, izražen kao procenat i kao razlomak.

Rješenje:

$$a) 12\% = \frac{12}{100} = \frac{12 \cdot 4}{100 \cdot 4} = \frac{3}{25}, 14\% = \frac{14}{100} = \frac{14 \cdot 2}{100 \cdot 2} = \frac{7}{50}, 15\% = \frac{15}{100} = \frac{15 \cdot 5}{100 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

b) Dio učenika koji nisu izabrali voće prikazan kao razlomak je $\frac{110}{1100}$. Razlomak se može skratiti ako se i brojilac i imenilac podijele sa 110 i dobija se $\frac{110 \cdot 110}{1100 \cdot 110} = \frac{1}{10}$.

Razlomak $\frac{1}{10}$ ako se proširi sa 10 da dobijemo 100 u imenitelju, imaćemo $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 10\%$. Znači, 10 % učenika nije izabralo nijedno od tri ponuđena voća u anketi.

c) Uputstvo: Rješava se kao i pod b).

Zadatak 1

Jedan proizvod košta 900 denara. Cijena proizvoda snižena je za 15 %. Koliko košta proizvod nakon sniženja cijene?

Primjer 2

U dvorištu porodice Siljanovski postavljeno je 1000 svjetiljki za dekoraciju povodom porodične zabave. 12 % svjetiljki bile su plave, 24 % zelene i 15 % crvene. Preostali dio svjetiljki bio je žut.

- Po koliko je svjetiljki bilo plavih, zelenih i crvenih?
- Broj svjetiljki svake boje zapiši kao razlomak.
- Odredi koliko svjetiljki je bilo žutih.

Rješenje:

- 12 % od 1000 svjetiljki bilo je plavih. Ako je 1 % ili $\frac{1}{100}$ od 1000 jednako 10 svjetiljki, tada je 12 % jednako $12 \cdot 10 = 120$. Znači 120 svjetiljki bile su plave.
24 % od 1000 svjetiljki bilo je zelenih (plavih je 12 %). To znači da je dvostruko više zelenih nego plavih. Ako je 120 plavih, dobijamo $2 \cdot 120 = 240$ zelenih svjetiljki.
Slično, 15 % od 1000, odnosno $15 \cdot 10 = 150$ svjetiljki, crvene su.
Možemo postupiti i drugačije: Polazeći od 10 % = $\frac{1}{10}$ dobija se da je 10 % od 1000 svjetiljki $1000 : 10 = 100$; za 5 % imamo polovinu od 10 %, tj. polovinu od 100, a to je 50 svjetiljki. Tako za 15 % dobijamo da je $100 + 50 = 150$ svjetiljki crveno.
- 120 svjetiljki od 1000 bile su plave; zapisano kao razlomak to je $\frac{120}{1000}$.
240 svjetiljki od 1000 bile su zelene; kao razlomak $\frac{240}{1000}$.
150 svjetiljki od 1000 bile su crvene; kao razlomak $\frac{150}{1000}$. Svaki od razlomaka zapiši kao neskrativ razlomak.
- Prvo treba odrediti koliko je ukupno bilo plavih, zelenih i crvenih svjetiljki. $120 + 240 + 150 = 510$ svjetiljki. Ako su preostale do 1000 svjetiljki bile žute, onda $1000 - 510 = 490$. Dakle, žutih je bilo 490 svjetiljki.
Zapiši broj žutih svjetiljki kao razlomak i kao procenat.

Primjer 3

U jednoj prodavnici prodalo se $\frac{12}{25}$ zelenog štofa i 38 % smeđeg štofa. Ako su početne dužine oba štofa jednake, od kojeg štofa se prodalo više?

Rješenje:

Zadatak možeš riješiti na više načina.

I način: Razlomak i procenat zapiši kao decimalne brojeve. $\frac{12}{25} = \frac{12 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{48}{100} = 0,48$.
 $38\% = \frac{38}{100} = 0,38$. $0,48 > 0,38$, znači $\frac{12}{25} > 38\%$. Prodalo se više od zelenog štofa.

II način: 38 % zapisujemo kao razlomak, odnosno $38\% = \frac{38}{100} = \frac{19}{50}$. Razlomke $\frac{12}{25}$ i $\frac{19}{50}$ svodimo na jednake imenioc, $\frac{12}{25} = \frac{24}{50}$. Dobija se $\frac{24}{50} > \frac{19}{50}$. Znači, $\frac{12}{25} > 38\%$.

III način: Razlomak $\frac{12}{25}$ zapiši u procentima. Imamo $\frac{12}{25} = \frac{12 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{48}{100} =$.

Znači, $\frac{12}{25} > 38\%$.

Zadatak 2

- a) Koristeći dijagram, zapiši koliko je $\frac{5}{6}$ od 24.
b) Nacrtaj dijagram kojim ćeš prikazati koliko je $\frac{3}{7}$ od 14 jabuka.

•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•

Primjer 4

U jednoj prodavnici sportske opreme ukupno je 1200 proizvoda. Prodavnica ima promociju na sljedeće kategorije proizvoda koje je imala: 12 % proizvoda bile su patike, 18 % tekstil, 10 % sportske torbe. Ostatak proizvoda bili su dodatni sportski dodaci.

- a) Izračunaj koliko proizvoda pripada svakoj od prve tri kategorije (patike, tekstil i sportske torbe).
b) Izračunaj koliko proizvoda su dodatni sportski dodaci.
c) Zapiši dio proizvoda tekstil kao razlomak i kao procenat.
d) Izračunaj kolika je razlika između procenata sportskih dodataka i patika.

Rješenje:

- a) Ukupan broj proizvoda je 1200.

Patike: 12 % od 1200 ili $\frac{12}{100}$ od 1200 je 12, znači 12 % od 1200 biće $12 \cdot 12 = 144$.

Tekstilni proizvodi: 18 % od 1200 je 18, znači 18 % od 1200 biće $18 \cdot 12 = 216$.

Sportske torbe: 10 % = $\frac{10}{100}$ od 1200, pa se dobija $1200 : 10 = 120$ (ili, pošto je 1 % od 1200 jednako 12, 10 % je 10 puta više, odnosno $10 \cdot 12 = 120$).

- b) Da bi se našao broj dodatnih sportskih dodataka, prvo izračunaj koliko ukupno ima proizvoda iz gore navedenih kategorija: $144 + 216 + 120 = 480$ proizvoda.
Pošto ukupno ima 1200 proizvoda, broj dodatnih sportskih dodataka je: $1200 - 480 = 720$ proizvoda.

- c) Tekstilnih proizvoda ima 216.

Zapisano kao razlomak je: $\frac{216}{1200} = \frac{216 \cdot 4}{1200 \cdot 4} = \frac{864}{4800} = \frac{18}{600} = \frac{3}{100} = 3\%$

- d) Broj dodatnih sportskih dodataka je 720. Zapisano kao razlomak je

$$\frac{720}{1200} = \frac{720 \cdot 12}{1200 \cdot 12} = \frac{8640}{14400} = \frac{60}{100}$$

$\frac{60}{100} = 60\%$. Patika ima 12 % proizvoda, a dodatnih sportskih dodataka 60 % proizvoda.

Znači $60\% - 12\% = 48\%$ je razlika između procenata dodatnih proizvoda i patika.

Zadatak 3

Jedan kamion s ukupnom nosivošću od 2,4 tona prevezio je pijesak do gradilišta. Prvi put je prevezao $\frac{5}{8}$ od 2,4 t, a drugi put 85 % svoje ukupne nosivosti. Kada je prevezao više pijeska?

Kako bi mogao primijeniti naučene strategije za izračunavanje procenata i razlomaka da bi procijenio i uporedio informacije u svakodnevnom životu? Navedi konkretan primjer gdje bi ti ovo znanje moglo pomoći da doneseš bolju odluku.

Riješi (kod kuće ili u školi) sljedeće zadatke u svojoj svesci za 10 minuta:

1. Koliko je 23 % od 600?
2. Zapiši razlomak $\frac{34}{50}$ u procentima.
3. Zapiši razlomak $\frac{7}{4}$ kao decimalni broj.
4. $\frac{3}{5}$ učenika u jednom odjeljenju igrali su košarku, a 15 % igrali tenis.

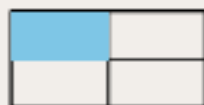
Kojim sportom je bilo angažovano više učenika iz tog odjeljenja?

Uporedi odgovor svakog zadatka i strategiju rješavanja sa svojim drugom iz razreda.

Samostalni rad

1. Zapiši kao procenat razlomke: $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{6}{50}$.
2. Zapiši kao razlomke procenat: 3 %, 11 %, 16 %, 24 %, 30 %, 55 %, 76 %, 80 %, 250 %.
3. Zapiši kao procenat decimalne brojeve: 0,06; 0,13; 0,25; 0,5; 0,77; 0,84; 0,9; 0,95; 1,23; 7,7.
4. Prikaži obojeni dio oblika razlomkom i procentom:

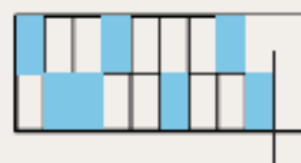
a)



b)



c)



d)



5. Jedan radnik primao je platu od 20 000 denara. Plata mu je povećana za 5 %. Koliko dinara iznosi povećanje i kolika je plata nakon povećanja?
6. Cijena jednog para patika bila je 1000 denara. Na kraju sezone cijena patika smanjena je za 10 %. Po kojoj cijeni su se prodavale patike nakon sniženja?
7. U odjeljenju VII^a bilo je 25 učenika. Na polugodištu je 7 učenika imalo peticu iz matematike, 9 iz maternjeg jezika i 12 iz biologije. Koliki procenat su bili odlični iz matematike, koliki iz maternjeg jezika i koliki iz biologije?
8. Benzin koji je do ponoći koštao 70 denara poskupio je za 4 %. Koja je nova cijena benzina?
9. U jednom ljetnom fudbalskom kampu $\frac{4}{25}$ učenika učilo je da budu golmani, $\frac{6}{15}$ da igraju na sredini terena i u odbrani, $\frac{12}{40}$ vježbalo je za napadače, dok su se ostali pripremali za sudije. Izrazi razlomke u procentima i odredi koliki procenat učenika je želio da bude sudija.

Sabiranje razlomaka

Razlomci su veoma važan dio matematike i koristimo ih u svakodnevnom životu, na primjer pri mjerenju sastojaka za kuhanje, dijeljenju količina, računanju rastojanja. U ovoj lekciji naučićeš kako pravilno sabirati razlomke, čak i kada imaju različite imeniocce. Ovo znanje će ti pomoći u daljem učenju matematike, posebno pri radu s procentima, proporcijama i u temi algebra.



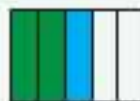
Primjer 1

U školskom orkestru jedne osnovne škole $\frac{2}{3}$ učenika sviralo je violinu, a $\frac{1}{5}$ učenika sviralo je violu. Koliki dio učenika je svirao ove žičane instrumente?

Rješenje:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$$

Dakle, $\frac{3}{5}$ učenika sviralo je neki od dva žičana instrumenta.



Zadatak 1

U jednoj prodavnici prije podne potrošeno je $\frac{3}{10}$ jednog topa platna, a poslije podne za $\frac{1}{10}$ više nego prije podne. Koliki dio topa platna je prodat tokom cijelog dana?

Primjer 2

Sportsko igralište jedne škole bilo je podijeljeno na nekoliko dijelova. Pri tom se $\frac{1}{2}$ igrališta koristilo za košarku, a $\frac{1}{3}$ za tenis. Koliki dio sportskog igrališta se koristio za košarku i tenis?

Rješenje:

Kako da odredimo zbir razlomaka $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$?

Da bismo sabrali dva razlomka s različitim imeniteljima, treba ih prvo dovesti na zajednički imenilac, a to može biti najmanji zajednički sadržalac njihovih imenilaca. NZS (2, 3) = 6.

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$ i $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$. Sada razlomci imaju jednake imeniocce i možemo ih sabrati:
 $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Znači, $\frac{5}{6}$ igrališta se koristi za košarku i tenis.

Dva razlomka sa različitim imeniteljem sabiraju se tako što se prvo dovedu na isti imenitelj, a zatim se sabiraju kao razlomci sa istim imeniteljem.

Zadatak 2

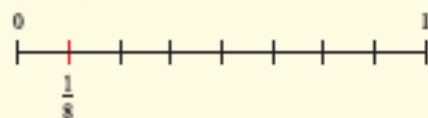
Izračunaj: a) $\frac{3}{10} + \frac{2}{9}$ b) $\frac{5}{16} + \frac{3}{5}$ c) $\frac{4}{9} + \frac{3}{11}$

Ako treba da odredimo zbir razlomaka bez računanja, kažemo da radimo procjenu.

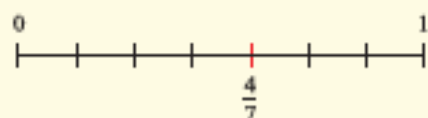
Primjer 3

Procijeni koliko je: a) $\frac{4}{7} + \frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{8} + \frac{5}{6}$?

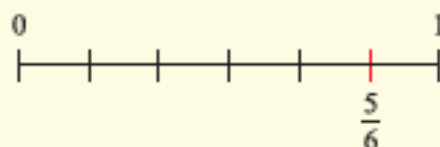
Rješenje:



Sa brojevne prave se vidi da je razlomak $\frac{1}{8}$ blizu 0; brojilac je manji od polovine imenioca. U tom slučaju razlomak se zaokružuje na 0.



Sa brojevne prave se vidi da je $\frac{4}{7}$ blizu $\frac{1}{2}$, odnosno brojilac je otprilike polovina imenioca. U tom slučaju razlomak se zaokružuje na $\frac{1}{2}$.



Sa brojevne prave se vidi da je razlomak $\frac{5}{6}$ blizu 1, odnosno brojilac je gotovo jednak imeniocu. U tom slučaju razlomak se zaokružuje na 1.

Koristeći navedeno, imamo:

- a) Prema crtežima s brojnim pravama i približnim (procijenjenim) vrijednostima dobija se da je $\frac{4}{7} + \frac{1}{8}$ razlomak oko $\frac{1}{2}$.
 b) U ovom slučaju zbir $\frac{1}{8} + \frac{5}{6}$ ima vrijednost oko 1.

Zadatak 3

Procijeni: a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{8}$ b) $\frac{9}{10} + \frac{1}{6}$

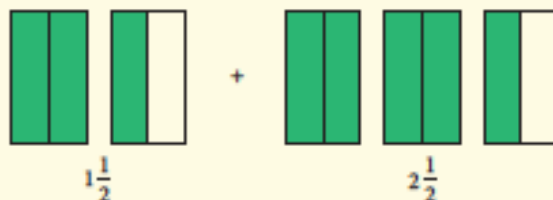
Primjer 4

Izračunaj $1\frac{1}{2}$ i $2\frac{1}{2}$.

Rješenje:

Mješovite brojeve možemo sabrati na dva načina.

I način: $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} =$ Posebno sabiramo cijele dijelove, a posebno razlomke
 $= (1 + 2) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 3 + 1 = 4.$



II način: $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} =$ Mješovite brojeve zapišemo kao neprave razlomke $= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$

Primjer 5

Od jedne pite kačkavalja prodato je $5\frac{1}{2}$ kg. Od pite je ostalo $2\frac{1}{4}$ kg. Koliko kilograma je bila pita kačkavalja?

Rješenje:

I način: $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = (5 + 2) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 7 + (\frac{2}{4} + \frac{1}{4}) = 7 + \frac{3}{4} = 7\frac{3}{4}$ kg.

II način: $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = \frac{11}{2} + \frac{1}{2} = \frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$ kg.

Dakle, pita kačkavalja je na početku imala masu $7\frac{3}{4}$ kg.

Zadatak 4

Izračunaj: a) $4\frac{2}{5} + 3\frac{1}{15}$ b) $10\frac{2}{7} + 3\frac{1}{8}$ c) $4\frac{5}{14} + 15\frac{8}{21}$

Primjer 6

Jedan biciklista prvi sat prešao je 28 km, drugi sat $2\frac{7}{15}$ km više nego prvi sat, a treći sat $3\frac{1}{30}$ km više nego prvi sat. Koliko kilometara je biciklista prešao za tri sata?

Rješenje:

Prvi sat prešao je 28 km, drugi sat $28 \text{ km} + 2\frac{7}{15} \text{ km}$, a treći sat $28 \text{ km} + 3\frac{1}{30} \text{ km}$.

Kako se traži koliko je prešao za tri sata, dobijamo izraz:

$$28 + (28 + 2\frac{7}{15}) + (28 + 3\frac{1}{30}) = (28 + 28 + 28 + 2 + 3) + (\frac{7}{15} + \frac{1}{30}) = 89 + (\frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} + \frac{1}{30}) = 89 + (\frac{14}{30} + \frac{1}{30}) = 89 + \frac{15}{30} = 89 + \frac{15 \cdot 15}{30 \cdot 15} = 89 + \frac{1}{2} = 89\frac{1}{2} \text{ km}$$

Znači, biciklista je za tri sata prešao $89\frac{1}{2} \text{ km}$.

Zadatak 5

Kolika je bila dužina jedne grede od koje su odrezana četiri komada dužine 2 m, $1\frac{1}{3} \text{ m}$, $5\frac{1}{2} \text{ m}$ i $\frac{5}{6} \text{ m}$?

U jednoj prodavnici postoje dvije vrste čokolade: jedne imaju masu $\frac{3}{4}$ standardne, a druge $\frac{5}{6}$ standardne mase. Ako kupiš po jednu od obje vrste, hoćeš li dobiti više ili manje od standardne mase jedne čokolade? Kako to možeš izračunati?

Riješi zadatke u svojoj svesci, a zatim svoje odgovore i strategiju rješavanja svake zadatke podijeli sa svojim školskim drugovima.

1. Izračunaj $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$.
2. Ana ima $\frac{3}{5}$ zajedničke uštede, a Petar ima $\frac{2}{7}$ uštede. Preostali dio uštede je kod Dijane. Koliki dio uštede zajedno imaju Petar i Ana?
3. Izračunaj $1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{4}$.
4. Ako imaš $\frac{5}{9}$ čokolade i još $\frac{1}{3}$ čokolade, koliko ukupno čokolade imaš?

Poredaj slova iz tabele prema redoslijedu rješenja zadataka da odrediš skriveni riječ.

$3\frac{11}{12}$	$1\frac{7}{15}$	$1\frac{7}{12}$	$\frac{31}{35}$
I	Z	R	B

Samostalni rad

1. Zbir razlomaka $\frac{1}{12}$ i $\frac{5}{28}$ uvećaj za razlomak $\frac{1}{14}$.
2. Zbir razlomaka $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$ i $\frac{4}{15}$, uvećaj za zbir razlomaka $\frac{1}{16}$ i $\frac{5}{18}$.
3. Jedan traktorista je prvog dana izorao $\frac{4}{15}$ njive, drugog dana $\frac{7}{20}$ i trećeg dana $\frac{7}{30}$. Koliki dio njive je izorao traktorista?
4. Koliki je zbir četiri broja ako je prvi $2\frac{3}{5}$, a svaki sljedeći je za $2\frac{1}{3}$ veći od prethodnog?
5. Grupa rudara je u ponedjeljak iskopala $123\frac{2}{9}$ t uglja, u utorak $151\frac{5}{6}$ t, u srijedu $128\frac{2}{4}$ t, u četvrtak $130\frac{7}{12}$ t, a u petak 149 t. Koliko tona uglja su iskopali tokom pet dana?
6. Jedan bager iskopa jednu jamu za 10 sati, a drugi istu jamu za 15 sati. Odredi:
 - a) Koliki dio jame će oba bagera zajedno iskopati za jedan sat?
 - b) Za koliko sati će oba bagera iskopati cijelu jamu?

Oduzimanje razlomaka

U prethodnoj lekciji učio/učila si kako sabirati razlomke, a u ovoj lekciji ćeš naučiti kako ih oduzimati. Zamisli da imaš cijelu čokoladu podijeljenu na osmine. Ako pojedeš 3 komada, koliko će ti ostati? Ovo je primjer oduzimanja razlomaka, gdje počinjemo s određenim brojem dijelova i oduzimamo neke od njih.



Kroz primjere iz svakodnevnog života razumjet ćeš zašto je ovo znanje korisno i kako ga možeš primijeniti u praktičnim situacijama.

Primjer 1

Na kružnom dijagramu prikazano je kako Ajše raspoređuje vrijeme tokom jednog dana. Koliki dio dana Ajše ne spava?

Ajšeine dnevne aktivnosti (24h)



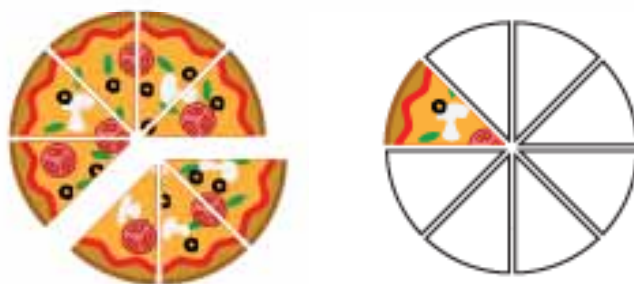
Rješenje:

Sa kružnog dijagrama možeš uočiti da Ajše spava $\frac{3}{8}$ dana, a $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$ ne spava.

Do istog rješenja možeš doći i na drugi način. Ako se jedan dan predstavi kao jedno cijelo, imamo: $1 - \frac{3}{8} = \frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. Objasni zašto umjesto 1 pišemo $\frac{8}{8}$.

Primjer 2

Na crtežu su date pice. S jedne pice uzet je označeni dio. Koliki dio pica je preostao?



Rješenje:

Prema crtežu imamo $1\frac{1}{8}$ pica od koje je oduzet dio što predstavlja $\frac{3}{8}$. Zapisujemo $1\frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{8}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Znači, ostalo je $\frac{3}{4}$ pica.

Zadatak 1

Nadi razlike:

a) $\frac{19}{23} - \frac{5}{23} - \frac{7}{23}$ b) $\frac{27}{25} - \frac{9}{25} - \frac{3}{25}$ c) $\frac{14}{17} - \frac{1}{17}$

Zadatak 2

Izračunaj: a) $4 - 1\frac{1}{5}$ b) $3\frac{2}{5} - 1\frac{3}{5}$

Primjer 3

Za jednu pozorišnu predstavu prodane su karte za $\frac{6}{7}$ sjedišta u teatru. Zbog nevremena, popunilo se samo $\frac{4}{5}$ sjedišta. Koliki dio od sjedišta za koja su bile prodane karte ostao je prazan?

Rješenje:

Da odrediš koliki dio od prodanih sjedišta nije bio popunjen zbog nevremena, treba da nađeš razliku dvaju razlomaka, odnosno $\frac{6}{7} - \frac{4}{5}$.

Kao i pri sabiranju razlomaka s različitim imeniteljima, i pri oduzimanju ih najprije dovodimo na zajednički imenilac. To može biti, na primjer, najmanji zajednički sadržalac njihovih imenilaca: $NZS(7, 5) = 35$.

$$\frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{30}{35} - \frac{28}{35} = \frac{2}{35}.$$

Znači, zbog nevremena, $\frac{2}{35}$ od sjedišta za koja su bile prodane karte ostalo je prazno.

Dva razlomka s različitim imeniteljima oduzimaju se tako što se prvo dovedu na isti imenitelj, a zatim se oduzimaju kao razlomci s istim imeniteljem.

Primjer 4

Izračunaj: a) $3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{7}$ b) $4\frac{7}{12} - 1\frac{5}{6}$

Rješenje:

Razliku razlomaka možemo naći na dva načina.

$$\text{a) I način: } 3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{7} = (3 - 1) + \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right) = 2 + \left(\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 5}{7 \cdot 5}\right) = 2 + \left(\frac{21}{35} - \frac{5}{35}\right) = 2 + \frac{16}{35} = 2\frac{16}{35}$$

$$\text{II način: } 3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{7} = \frac{18}{5} - \frac{8}{7} = \frac{18 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{8 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{126}{35} - \frac{40}{35} = \frac{86}{35} = 2\frac{16}{35} \quad NZS(5, 7) = 35$$

$$\text{b) I način: } 4\frac{7}{12} - 1\frac{5}{6} = (4 - 1) + \left(\frac{7}{12} - \frac{5}{6}\right) = 3 + \left(\frac{7}{12} - \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2}\right) = 3 + \left(\frac{7}{12} - \frac{10}{12}\right) = 2 + 1 + \frac{7}{12} - \frac{10}{12} = 2 + \frac{19}{12} - \frac{10}{12} = 2 + \frac{9}{12} = 2\frac{3}{4}$$

U postupku oduzimanja dobijemo da je $\frac{7}{12} < \frac{10}{12}$, pa „uzimamo jedno cijelo” od cijelog dijela umanjenika, zapišemo ga kao $\frac{12}{12}$ i dodamo razlomku $\frac{7}{12}$. Tako dobijemo $\frac{19}{12}$. Pogledaj postupak ponovo.

$$\text{II način: } 4\frac{7}{12} - 1\frac{5}{6} = \frac{55}{12} - \frac{11}{6} = \frac{55}{12} - \frac{11 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{55}{12} - \frac{22}{12} = \frac{33}{12} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \quad (\text{Zašto je } \frac{33}{12} = \frac{11}{4}?)$$

Zadatak 3

Koji broj uvećan za $\frac{3}{5}$ daje rezultat $\frac{2}{3}$?

Zadatak 4

Izračunaj: a) $4\frac{5}{6} - 3\frac{1}{3}$ b) $3\frac{4}{9} - 2\frac{5}{6}$ c) $5\frac{3}{8} - 1\frac{5}{12} - 2\frac{3}{4}$

Primjer 5

Ana je imala $4\frac{2}{3}$ kilograma brašna. Za pripremu kolača upotrijebila je $2\frac{5}{6}$ kilograma brašna. Koliko brašna joj je ostalo?

Rješenje:

$$4\frac{2}{3} - 2\frac{5}{6} = \frac{22}{3} - \frac{17}{6} = \frac{22 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{17 \cdot 1}{6 \cdot 1} = \frac{44}{6} - \frac{17}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Ani je ostalo $4\frac{1}{2}$ kg brašna.

Zadatak 5

Martin pješači $5\frac{3}{4}$ kilometara svako jutro. Jednog jutra pješačio je određeno vrijeme i stao nakon što je prešao $2\frac{2}{3}$ kilometara. Koliko kilometara mu preostaje od kilometara koje prelazi svakog jutra?

Zašto je važno da znamo kako oduzimati razlomke s različitim imeniteljima u svakodnevnom životu? Možeš li navesti primjer iz stvarne situacije u kojoj bi ti ovo znanje bilo korisno?

◊ Razmisli o svom znanju i odgovori u svojoj svesci sa

☒ , ? ili X :

- ☒ – Savršeno razumijem i mogu samostalno rješavati zadatke.
- ? – Djelimično razumijem, ali treba mi još malo vježbe.
- X – Još nisam siguran/sigurna i treba mi dodatna pomoć.

1. Mogu oduzimati razlomke s istim imeniteljem.
2. Mogu naći zajednički imenilac za razlomke s različitim imeniteljima.
3. Mogu pravilno oduzimati razlomke s različitim imeniteljima.
4. Mogu oduzimati mješovite brojeve.
5. Mogu primijeniti oduzimanje razlomaka u stvarnim situacijama.

Samostalni rad

1. Izračunaj: a) $2 - \frac{4}{7}$ b) $3\frac{1}{2} - 2$ c) $3 - 1\frac{7}{12}$ d) $5\frac{7}{9} - 5$
2. Izračunaj: a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ b) $\frac{8}{9} - \frac{7}{12}$ c) $\frac{1}{10} - \frac{1}{15}$ d) $\frac{27}{40} - \frac{7}{18} - \frac{5}{24}$ e) $\frac{3}{2} - (\frac{5}{6} - \frac{2}{3})$
3. Kojim brojem treba uvećati razliku brojeva $4\frac{5}{8}$ i $2\frac{3}{4}$ da bi se dobilo $7\frac{5}{9}$?
4. Kojim brojem treba umanjiti zbir brojeva $11\frac{7}{8}$ i $13\frac{5}{12}$ da bi se dobilo 19?
5. Jedan zemljoradnik je prvog dana prekopao $\frac{2}{5}$ njive, a drugog dana $\frac{1}{4}$. Koliki dio njive mu je ostao da prekopa?
6. Jedan bazen puni se vodom iz dvije cijevi, a prazni trećom cijevi. Prva cijev ga puni za 8 sati, druga za 12 sati, a treća ga prazni za 6 sati.
 - a) Koliki dio bazena će se napuniti za jedan sat iz prve dvije cijevi?
 - b) Za koliko sati će se napuniti cijeli bazen?
 - c) Koliki dio bazena će biti pun za jedan sat ako ga prve dvije cijevi pune, a treća prazni?
7. Jedan pješak prešao je 28 km za 6 sati, a biciklista 33 km za 3 sata. Koliko kilometara više za jedan sat prelazi biciklista od pješaka?

Množenje razlomaka

U ovoj lekciji naučit ćeš kako množiti razlomke.

Razlomci ti pomažu da prikažeš dijelove cjeline, a množenje razlomaka pokazuje kako izračunati dio od dijela ili kako kombinirati dijelove.

Počet ćeš razumijevanjem osnovnih pravila za množenje razlomaka i vidjeti kako možeš pojednostaviti rezultate. Istražit ćeš primjere iz svakodnevnog života, kao što su dijeljenje pizze ili mjerenje sastojaka pri kuhanju, da lakše shvatiš zašto je ovaj račun važan.



Primjer 1

Zbirovi jednakih sabiraka mogu se zapisati kraće:

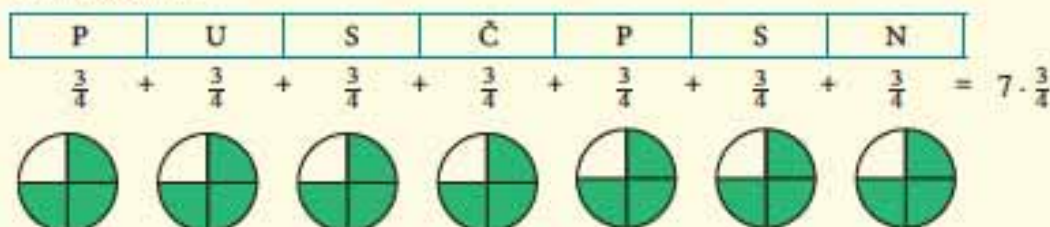
$$7 + 7 = 2 \cdot 7 \quad 7 + 7 + 7 = 3 \cdot 7 \quad \underbrace{7 + 7 + 7 \dots + 7}_{n \text{ sabirki}} = n \cdot 7$$

Primjer 2

Simona je trenirala tenis po $\frac{3}{4}$ sata svaki dan. Koliko je ukupno sati trenirala sedmično?

Rješenje:

Dani u sedmici



Imamo: $7 \cdot 3$ četvrtina je 21 četvrtina. Zapišemo $7 \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.

Znači, Simona je tokom jedne sedmice trenirala tenis $5\frac{1}{4}$ sata.

Razlomak $\frac{a}{b}$ množi se prirodnim brojem n tako da brojilac razlomka pomnožimo prirodnim brojem n , a imenilac prepisemo, odnosno:

$$n \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}.$$

Zadatak 1

U četiri boce bilo je po $\frac{7}{8}$ l soka. Koliko ukupno litara soka je bilo?

Kada množiš prirodni broj sa razlomkom, pazi da ne izostaviš tačku kao znak množenja, jer bi proizvod prirodnog broja i razlomka bez tog znaka izgledao kao mješoviti broj.

Ako prirodni broj n i imenilac b razlomka $\frac{a}{b}$ imaju zajednički djelilac, možeš ih skratiti prije množenja i račun ćeš moći uraditi s manjim brojevima.

Primjer 3

Izračunaj proizvod $6 \cdot 1\frac{5}{9}$.

Rješenje:

$$6 \cdot 1\frac{5}{9} = \text{Mješoviti broj prvo zapišemo kao nepravilni razlomak} = 6 \cdot \frac{14}{9} = \frac{6 \cdot 14}{9} = \frac{84}{9} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}.$$

Zadatak 2

Zapiši za svaku sliku kao u primjeru pod a).

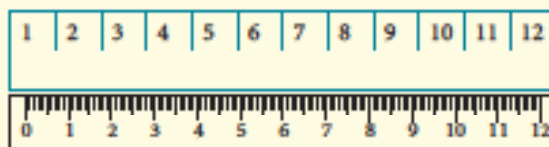


$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

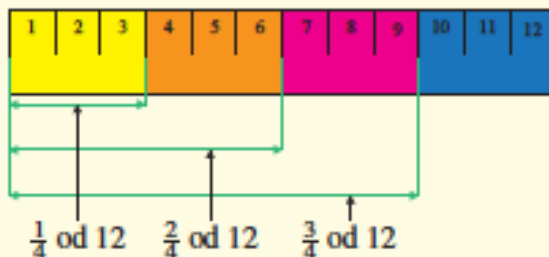
**Primjer 4**Marko ima 12 godina, a Sara ima $\frac{3}{4}$ Markovih godina. Koliko godina ima Sara?**Rješenje:**Da bismo našli $\frac{3}{4}$ od 12, možemo preduzeti sljedeće korake:**I korak:**

Uzmemo traku dužine 12 cm.

Podijelimo je na dijelove od 1 cm kao na crtežu.

**II korak:**

Traku podijelimo na 4 jednaka dijela i svaki dio obojimo drugom bojom, kao na crtežu.

**III korak:**

Koristeći traku, popunjavamo kvadratiće.

$$\frac{1}{4} \text{ od } 12 = 3, \quad \frac{2}{4} \text{ od } 12 = 6, \quad \frac{3}{4} \text{ od } 12 = 9$$

IV korak:

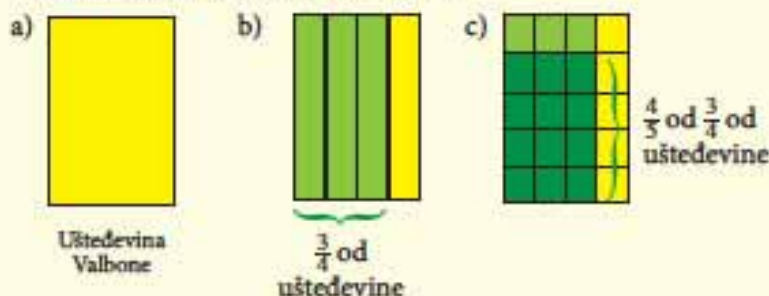
$$\frac{1}{4} \cdot 12 = 3 \quad \frac{2}{4} \cdot 12 = 6 \quad \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$$

Dio $\frac{a}{b}$ od broja x je proizvod $\frac{a}{b} \cdot x$.**Primjer 5**Valbona je otišla na pijacu i ponijela $\frac{3}{4}$ od ušteđevine. $\frac{4}{5}$ od novca koji je ponijela potrošila je na suvenire. Koliki dio ušteđevine je Valbona potrošila na suvenire?

Rješenje:

Valbona je potrošila $\frac{4}{5}$ od $\frac{3}{4}$ uštedevine.

Crteži prikazuju rješavanje problema.



Prema crtežu pod c) $\frac{4}{5}$ od $\frac{3}{4}$ uštedevine koje je Valbona potrošila predstavljeno je sa $4 \cdot 3$ od ukupno $5 \cdot 4$ malih pravougaonika ili 12 od ukupno 20 pravougaonika. Zapisujemo: $\frac{12}{20}$. Znaš da se $\frac{4}{5}$ od $\frac{3}{4}$ može zapisati kao $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

Prema primjeru,

Proizvod dva razlomka je razlomak čiji je brojilac proizvod njihovih brojilaca, a imenilac proizvod njihovih imenilaca.

Primjer 6

Za rodendansku zabavu koju je organizovao Mite kupljeno je $5\frac{2}{3}$ litara soka. Od toga je potrošeno $\frac{2}{3}$. Koliko litara je potrošeno?

Rješenje:

$\frac{2}{3}$ od $5\frac{2}{3}$ je $\frac{2}{3} \cdot 5\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{17}{3} = \frac{2 \cdot 17}{3 \cdot 3} = \frac{34}{9} = 3\frac{7}{9}$.

Znači, za rodendansku zabavu potrošeno je $3\frac{7}{9}$ litara soka. Da bi se izvršilo množenje, miješani broj se prethodno zapisuje kao nepravilni razlomak.

Kako bi postupio/la ako treba pomnožiti dva miješana broja?

Kako bi se mogla primijeniti vještina množenja razlomka s miješanim brojem u stvarnom životu, npr. pri dijeljenju hrane, materijala ili planiranju aktivnosti? Objasni konkretnim primjerom.

U svojoj svesci odgovori na sljedeća pitanja.

1. Da li sam razumio/razumjela šta je razlomak i kako se razlomak množi prirodnim brojem? Da/Ne
2. Mogu li pretvoriti mješoviti broj u nepravilni razlomak i obratno? Da/Ne
3. Jesam li uspio/uspjela riješiti zadatke s množenjem razlomaka i mješovitih brojeva? Da/Ne
4. Mogu li primijeniti pravila za množenje razlomaka u stvarnim situacijama (na primjer, pri podjeli hrane, materijala i slično)? Da/Ne

Ako si odgovorio/odgovorila s „Da“ na većinu pitanja, to znači da si dobro razumio/razumjela lekciju.

Ako si odgovorio/odgovorila s „Ne“ na neka pitanja, to znači da trebaš ponoviti te dijelove kako bi poboljšao/poboljšala razumijevanje.

Zapiši šta ti je bilo najteže u ovoj lekciji i na čemu bi volio/voljela više raditi.

Samostalni rad

1. Izračunaj: a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7}$ b) $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{15}$ c) $\frac{3}{10} \cdot 1\frac{1}{9}$ d) $3\frac{1}{8} \cdot 1\frac{4}{15}$
2. Od 36 učenika $\frac{2}{9}$ su djevojčice. Koliko je djevojčica, a koliko dječaka?
3. Pokaži da je proizvod razlomaka $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ jednak njihovoj razlici.
4. Izračunaj površinu pravougaonika čije su stranice $4\frac{1}{3}$ cm i $3\frac{1}{3}$ cm.
5. Šta je veće:
 - a) $\frac{3}{5}$ od 150 ili $\frac{5}{9}$ od 180?
 - b) $\frac{3}{4}$ od $2\frac{2}{9}$ ili $\frac{4}{5}$ od $3\frac{3}{4}$?
6. Izračunaj:
 - a) $\frac{3}{5} \cdot (\frac{2}{3} + \frac{3}{4})$ b) $(1\frac{3}{8} + 2\frac{1}{6}) \cdot 1\frac{3}{5}$ c) $(4 - 2\frac{5}{6}) \cdot 2\frac{2}{3}$ d) $1\frac{3}{4} \cdot (1\frac{1}{7} - \frac{3}{14})$
7. Petar je vježbao tako što je: prvo trčao $\frac{4}{9}$ jedne kružne staze, a potom vozio bicikl $\frac{2}{3}$ kružne staze. Od ukupne dužine koju je prešao, $\frac{2}{5}$ je prešao pod sjenom.
 - a) Koliko puta je prešao kružnu stazu (koliko ukupno krugova je prešao)?
 - b) Koliko dijelova kružne staze je prešao pod sjenom?

Dijeljenej razlomaka

U ovoj lekciji fokusirat ćemo se na dijeljenje razlomaka, što će ti pomoći da primijeniš koncept dijeljenja u praktičnim situacijama. Zamisli da imaš 3 jabuke i da su one isječene na polovine. Koliko ljudi će dobiti po polovinu jabuke? Da bi odgovorio/odgovorila na ovo pitanje, zapravo trebaš odrediti količnik $3 : \frac{1}{2}$. Ovo je samo jedan primjer kako primjenjujemo dijeljenje razlomaka u svakodnevnom životu. U ovoj lekciji ćeš vježbati na konkretnim primjerima, što će ti pomoći da poboljšaš svoje vještine dijeljenja.



$$3 : \frac{1}{2} = 6$$

Primjer 1

Vesna je imala $\frac{4}{5}$ torte. Ona je pojela $\frac{1}{3}$ svog dijela torte. Koliki dio torte je pojela? Prikaži svoj odgovor i dijagramom.

Zadatak 1

- Koliko grupa od po 2 narandže možeš napraviti od 6 narandži? Zapiši rješenje odgovarajućom matematičkom operacijom.
- Koliko četvrtina ima u jednoj polovini? Kojom matematičkom operacijom možeš prikazati rješenje?

Primjer 2

Izračunaj: a) $3 \cdot \frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2}$ c) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}$

Rješenje:

$$\text{a) } 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{b) } \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 2} = \frac{14}{14} = 1 \quad \text{c) } 2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \frac{21}{21} = 1$$

U datom primjeru očigledno je da je brojilac prve razlomka jednak imenitelju drugog razlomka i da je imenitelj prvog razlomka jednak brojilcu drugog razlomka. Proizvod takvih razlomaka je 1.

Recipročni razlomci su dva razlomka čiji je proizvod 1.

Zadatak 2

Zapiši recipročne razlomke od: $\frac{11}{13}$, $\frac{9}{10}$, 5, $4\frac{3}{5}$, $\frac{21}{25}$.

Primjer 3

Natalija i Petar trebali su podijeliti $\frac{4}{5}$ čokoladu na jednake dijelove.

Natalija je postupila ovako: petine je podijelila sa 2 i svako je dobio 2 petine.

Zapisala je: $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{2}{5}$

Petar je postupio ovako: svaku petinu je podijelio na dva jednaka dijela i od svake petine dobio po dvije desetine. Znači, svako je dobio po 4 desetine.

Zapisao je: $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$



Natalija i Petar su i sa jednim i sa drugim načinom dobili iste dijelove čokolade.

Znači, razlomak se može podijeliti prirodnim brojem na dva načina: njegov brojilac se podijeli tim brojem ili se njegov imenilac pomnoži tim brojem, odnosno:

$$\frac{a}{b} : n = \frac{a \cdot n}{b} \text{ ili } \frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n}.$$

Primjer 4

Izračunaj $\frac{2}{7} : 3$.

Rješenje:

I način: $\frac{2}{7} : 3 = \frac{2 \cdot 3}{7}$

II način: $\frac{2}{7} : 3 = \frac{2}{7 \cdot 3} = \frac{2}{21}$

Pošto u prvom načinu brojilac nije djeljiv prirodnim brojem, praktičnije je razlomak podijeliti prirodnim brojem na drugi način. Zato se može reći da drugi postupak ima širu primjenu.

$\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b \cdot n} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n}$, gdje je $\frac{1}{n}$ recipročni razlomak od n .

Razlomak se dijeli prirodnim brojem tako što se razlomak množi recipročnom vrijednošću prirodnog broja.

Primjer 5

Ilir je trebao izračunati:

a) $\frac{4}{9} : \frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$

Rješenje:

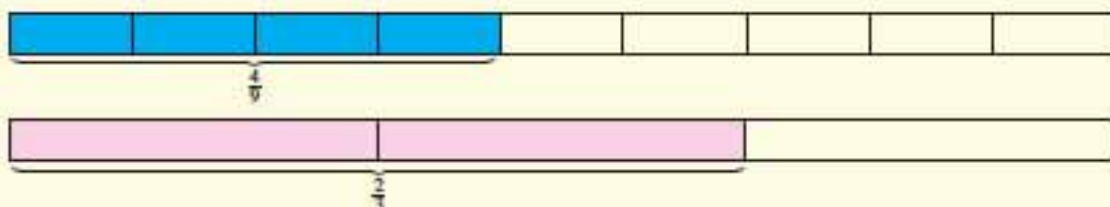
- a) Ilir je znao kako se množe dva razlomka i da je dijeljenje obrnuta operacija od množenja, pa je izračunao na sljedeći način: $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{2}{3}$.

Da bi bio siguran da je postupak tačan, on je napravio provjeru $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$.

Pokušao je i sa dijagramima. Pri tome, prema operaciji koju treba izvršiti, tražio je odgovor na pitanje: „Koliko $\frac{2}{3}$ ima u $\frac{4}{9}$?” Odgovor na ovo pitanje dobio je kada je odredio koliki dio obojen žutom bojom potpuno pokriva dio obojen plavom bojom.

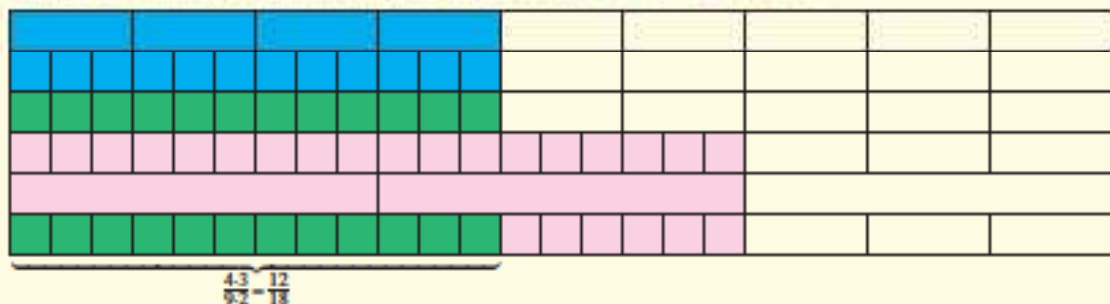
Tako je dobio dio obojen zelenom bojom, koji predstavlja $\frac{12}{18}$.

Zatim je skratio dobijeni razlomak i dobio: $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 6}{18 \cdot 6} = \frac{2}{3}$, što znači isti rezultat kao u prvom slučaju. Objasni kako je Ilirin dijagram povezan sa zapisom za dijeljenje dva razlomka. $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 6}{18 \cdot 6} = \frac{2}{3}$



Svaka od četiri devetine se dijeli na trećine = $4 \cdot 3$ dijela = 12 dijelova

Ima po 9 takvih dijelova u svakoj od dvije trećine = $9 \cdot 2 = 18$ dijelova



Iz dijagrama je primijetio da se ovo može zapisati kao proizvod, odnosno razlomak – dijeljenik pomnožen je sa recipročnim razlomkom od razlomka djelitelja.

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{18} = \frac{12 \cdot 6}{18 \cdot 6} = \frac{2}{3}$$

množenje sa recipročnim razlomkom na $\frac{2}{3}$

- b) Ilir je pokušao da iskoristi prvi način kao pod a), odnosno zapisao je: $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5}$, ali je došao u situaciju kada se pri dijeljenju ne dobija cijeli broj ni u brojocu ni u imenitelju, pa je zato izračunao na drugi način: $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9} = 1 \frac{1}{9}$
Ponovo se može zaključiti da je pri dijeljenju razlomka razlomkom praktičnije dijeljenik pomnožiti sa recipročnim razlomkom djelitelja.

Razlomak se dijeli razlomkom tako što dijeljenik množimo sa recipročnim razlomkom djelitelja, odnosno $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$

Zadatak 3Izračunaj: a) $1\frac{1}{6} : 3$ b) $\frac{3}{4} : \frac{3}{8}$ c) $\frac{5}{16} : 4\frac{3}{8}$ d) $\frac{7}{12} : \frac{3}{5}$ **Primjer 6**Majka od Kire je za $3\frac{1}{4}$ kg brašna potrošila 260 dinara. Koliko košta 1 kg brašna?**Rješenje:**

Potrošeni novac se dijeli sa kupljenim kilogramima brašna. Imamo:

$$260 : 3\frac{1}{4} = 260 : \frac{13}{4} = \frac{260}{1} : \frac{13}{4} = \frac{260}{1} \cdot \frac{4}{13} = \frac{260 \cdot 4}{1 \cdot 13} = \left\{ \frac{260 \cdot 13}{13 \cdot 13} = \frac{20}{1} \right\} \cdot 4 = \frac{20 \cdot 4}{1 \cdot 1} = \frac{80}{1} = 80$$

260 i 13 se mogu skratiti sa 13

Znači, 1 kg brašna košta 80 dinara.

Zadatak 4Bojan ima komade letvi dužine $\frac{2}{7}$ m. Želi da napravi kućicu na drvetu sa prozorom koji ima dužinu $\frac{4}{5}$ m. Koliko komada letvi od $\frac{2}{7}$ m će biti u dužini od $\frac{4}{5}$ m?

Ako znaš kako da množiš i dijeliš cijele brojeve, zašto misliš da pri dijeljenju razlomaka moramo koristiti množenje? Objasni svoje razmišljanje primjerom.

U svesku odgovori na pitanja:

- Razumijem li pravilo za dijeljenje razlomaka?
 - Da, znam da treba da pomnožim dijeljenika sa recipročnim razlomkom djelitelja.
 - Djelimično, treba mi još malo vježbe.
 - Ne, još mi nije jasno i treba mi dodatno objašnjenje.
- Mogu li samostalno da riješim zadatak sa dijeljenjem razlomaka?
 - Da, mogu bez greške.
 - Mogu, ali ponekad griješim.
 - Teško mi je i ne znam kako da počnem.
- Mogu li da objasnim zašto pri dijeljenju razlomaka koristimo množenje?
 - Da, mogu da objasnim svojim riječima.
 - Djelimično, razumijem, ali ne znam kako da objasnim.
 - Ne, još mi nije jasno.

4. Kako se osjećam u vezi današnje lekcije?

- Siguran/na sam u svoje znanje.
- Treba mi još malo vježbe.
- Ovo mi je bilo teško, potrebna mi je pomoć.

Ako imaš više od prvog ponudjenog odgovora na pitanja, znači da si savladao lekciju.

Ako je većina tvojih odgovora drugi ponuđeni odgovor na pitanja, treba ti još malo vježbe.

Ako imaš više od trećeg ponudjenog odgovora na pitanja, potrebna ti je dodatna podrška i objašnjenje.

Samostalni rad

1. Izračunaj:

a) $\frac{4}{5} : 2$ b) $\frac{3}{4} : 3$ c) $\frac{4}{9} : 6$ d) $3\frac{3}{8} : 9$ e) $5\frac{4}{7} : 9$

2. Izračunaj količnik:

a) $\frac{12}{25} : \frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{4} : \frac{3}{8}$ c) $2 : \frac{1}{4}$ d) $1\frac{11}{12} : \frac{9}{14}$ e) $\frac{5}{16} : 4\frac{3}{8}$ f) $6\frac{8}{9} : 4\frac{1}{12}$

3. Izračunaj:

a) $(1 - \frac{3}{4}) : \frac{5}{16}$ b) $(2\frac{7}{12} - 1\frac{1}{2}) : 2\frac{3}{11}$ c) $\frac{9}{14} : (1\frac{2}{7} + 1\frac{1}{3})$

4. Za $3\frac{3}{4}$ kg jabuka plaćeno je 300 dinara. Koliko dinara je jedan kilogram jabuka?

5. Jedno pakovanje šećera sadrži $\frac{1}{8}$ kg šećera. Koliko takvih pakovanja šećera se može napraviti od $31\frac{1}{4}$ kg šećera?

6. Koliko hljebova se može napraviti od 180 kg brašna ako je za 1 hljeb potrebno $\frac{3}{4}$ kg brašna?

Sabiranje i oduzimanje decimalnih brojeva sa različitim brojem decimala

Do sada si naučio kako da sabiraš i da oduzimaš decimalne brojeve sa istim brojem decimala. Poravnavao si brojeve jedan ispod drugog prema decimalnom zarezu i računao ih isto kao prirodne brojeve. Ali, šta se dešava kada brojevi imaju različit broj decimala? Na primjer, kako bi izračunao $12,5 + 3,27$? Možeš li ih odmah sabrati ili prvo treba nešto da uradiš? U ovoj lekciji ćeš naučiti kako da izjednačiš broj decimala dodavanjem nula da bi pravilno odredio zbir ili razliku decimalnih brojeva.



$$= 228 + \left(\frac{32 \cdot 10}{100 \cdot 10} + \frac{3 \cdot 100}{10 \cdot 100} + \frac{362}{1000} \right) = 228 + \left(\frac{320}{1000} + \frac{300}{1000} + \frac{362}{1000} \right) =$$

$$= 228 + \frac{982}{1000} = 228 \frac{982}{1000} = 228,982$$

Znači, poljoprivredno gazdinstvo ima 228,982 hm².

II način: Kao i kod prirodnih brojeva, i ovdje pri zapisivanju treba paziti na pozicije cifara u brojevima. Stotinke se zapisuju ispod stotinki, desetinke ispod desetinki, jedinice ispod jedinica, desetice ispod desetica itd.

U drugom načinu ćemo koristiti prvo svojstvo decimalnih brojeva kako ne bi došlo do greške pri zapisivanju decimalnih brojeva vertikalno, jedan ispod drugog. Zatim sabiraš kao prirodne brojeve. Samo pazi da zapišeš zarez kada završiš sa sabiranjem decimalnog dijela decimalnih brojeva.

$$\begin{array}{r} 176,320 \\ 7,300 \\ 26,362 \\ 19,000 \\ \hline 228,982 \end{array}$$

Primjer 3

Izračunaj razliku decimalnih brojeva 27,63 i 3,796.

Rješenje:

I način:

$$27,63 - 3,796 = 27 \frac{63}{100} - 3 \frac{796}{1000} = (27 - 3) + \left(\frac{63}{100} - \frac{796}{1000} \right)$$

$$= 24 + \left(\frac{63 \cdot 10}{100 \cdot 10} - \frac{796}{1000} \right) = 24 + \left(\frac{630}{1000} - \frac{796}{1000} \right) = \boxed{796 > 630}$$

Zašto razlomak umanjnik ima brojilaca 1630?

$$= 23 + \left(\frac{1630}{1000} - \frac{796}{1000} \right) = 23 + \frac{834}{1000} = 23 \frac{834}{1000} = 23,834$$

II način: Oduzimaj kao prirodne brojeve. Pazi na zarez.

Primjer 4

Ana je otišla u prodavnicu i kupila 1 l soka za 82,5 denara, 300 g čokoladnih kolača za 135 denara, 250 g sira za 97,75 denara. Ana je u novčaniku imala 500 denara.

a) Koliko denara je ukupno potrošila Ana? b) Koliko denara joj je ostalo nakon kupovine?

Kasnije je odlučila kupiti i notes koji košta 185,5 denara.

c) Da li će joj ostati više od 50 denara nakon ove kupovine?

Rješenje:

- a) Ukupan iznos za kupljene proizvode je:

$$82,5 + 135 + 97,75 = 82,50 + 135,00 + 97,75 \\ = 217,50 + 97,75 = 315,25.$$

Ana je potrošila 315,25 dinara za prvu kupovinu.

- b) Novac koji joj je ostao:
- $500 - 315,25 = 500,00 - 315,25 = 184,75$
- .

Ani je ostalo 184,75 dinara.

- c) Notes je koštao
- $185,50 > 184,75$
- . Znači, Ana nije imala novca da kupi notes.

Ne, Ani neće ostati više od 50 dinara jer nema dovoljno novca ni da kupi notes.

Možeš sabirati i horizontalno. Pri sabiranju pazi na poziciju cifara u brojevima koje sabiraš.

Zadatak 1

Koji broj je za 723,864 veći od zbira brojeva 27,8 i 1364,03?

Zadatak 2

Za koliko je zbir brojeva 37,9 i 3,79 veći od njihove razlike?

Zadatak 3

Abduraman je uštedio novac za svoje putovanje. On kupuje kartu za autobus za 175,50 dinara, suvenir za 120,75 dinara i doručak za 75,20 dinara.

- a) Koliko dinara je Abduraman potrošio za sve ove stvari?
- b) On je sa sobom imao 600 dinara. Koliko dinara mu je ostalo nakon svega što je kupio?
- c) Zatim je Abduraman odlučio kupiti i knjigu koja košta 210,60 dinara. Hoće li mu ostati dovoljno novca nakon kupovine knjige?

Imaš 1000 dinara i treba da kupiš: knjigu za 245,60 dinara, kapu za 385,45 dinara i obrok za 132,75 dinara.

Kako ćeš rasporediti novac i hoće li ti ostati novca za nešto drugo? Objasni svoj pristup i kako ćeš izračunati troškove.

Riješi sljedeće zadatke u svesci:

1. $6,73 + 0,8$ 2. $16,37 - 7,8$ 3. $13 - (7,8 + 0,95)$

Završi kratkom refleksijom: Šta sam naučio danas? Šta trebam ponoviti?

Samostalni rad

1. Izračunaj:

- a) $0,32 + 1,08$ b) $0,064 + 1,32 + 2,4$ c) $12,056 + 0,8 + 3,25$
d) $357 - 1,02$ e) $1,3 - 0,75$ f) $2 - 0,375$

2. Izračunaj:

- a) $7,56 - (3,2 + 1,08)$ b) $15 - (14,3 - 7,28)$
c) $(1,567 - 0,32) + (2,3 - 0,54)$ d) $(5,61 - 1,8) - (0,005 + 1,7)$

3. Dijametar Zemlje, koji spaja polove, iznosi 12 713,824 km, a dijametar ekvatora je duži za 42,96 km. Koliki je dijametar ekvatora?

4. Tijelo koje slobodno pada (s neke visine ka površini Zemlje) u prvoj sekundi pređe 4,905 m, a svake naredne sekunde po 9,81 m više. Odredi koliki će put preći tijelo za: a) 2 sekunde b) 3 sekunde c) 5 sekundi.

5. Izračunaj na dva načina:

- a) $2,75 + \frac{3}{5} + 13,5$ b) $7,2 + \frac{7}{25}$ c) $7,25 + 1\frac{3}{4} + 3,2$
d) $17,6 - 3\frac{21}{40} - 5,725$ e) $12\frac{3}{5} - 7,32 + 3\frac{3}{4}$

6. U jednom stovarištu građevinskog materijala ima 73,56 t cementa. Prvog dana je prodato 25,745 t, drugog 31,63 t, a trećeg dana je dovezeno 17,4 t, ali je prodato 23 t. Odredi koliko je cementa ostalo u stovarištu?

7. Od top platna dužine 34 m odsječeni su komadi dužine: 3,7 m, 7,25 m, 0,83 m, 5 m i 13,72 m. Koliko metara platna je ostalo?

8. Jedna mokra cigla ima masu 4,5 kg. Poslije sušenja izgubi masu od 0,8 kg, a poslije pečenja izgubi još 0,6 kg. Koliku masu ima cigla poslije pečenja?

9. Viktor, Marina i Ismet zajedno imaju masu 184,7 kg. Viktor i Marina zajedno imaju masu 116,5 kg, a Marina i Ismet 114,8 kg. Kolika je masa svakoga od njih?

10. Prikaži tabelarno skupove:

- $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ i } 0,5 < x < 6,5\}$, $B = \{x \mid 4,82 < x < 4,91 \text{ i } x \text{ ima dvije decimale}\}$,
 $C = \{x \mid x < 2,5 < x + 1 \text{ i } x \in \mathbb{N}\}$.

Množenje i dijeljenje decimalnih brojeva

Decimalne brojeve koristiš u svakodnevnom životu, posebno pri mjerenjima, proračunima s novcem, brzinom, težinom i mnogim drugim situacijama. Da bi mogao tačno izvoditi matematičke operacije s njima, potrebno je da razumiješ kako se pravilno množe i dijele decimalni brojevi.

Do sada si se već upoznao s osnovnim proračunima s decimalnim brojevima, ali novi izazov će biti množenje decimalnih brojeva koji imaju različit broj decimalnih mjesta. Naučit ćeš kako da prilagodiš brojeve za lakše i preciznije računanje.

Savladavanjem ovih operacija moći ćeš uspješno primjenjivati decimalne brojeve u svakodnevnim situacijama i računati tačno i precizno.



Primjer 1

Perimetar jednog kvadrata je 18,8 cm.

- Izračunaj stranicu kvadrata.
- Izračunaj perimetar jednakokrakog trougla s krakom 5,4 cm, ako je dužina osnovice jednaka dužini stranice kvadrata.
- Izračunaj perimetar pravougaonika čija je dužina jednaka kraku trougla, a širina jednaka stranici kvadrata.

Rješenje:

- Perimetar kvadrata $L = 4 \cdot a$. Ako zamijenimo u formuli za L , dobijamo $18,8 = 4 \cdot a$. Da bismo izračunali stranicu, treba perimetar podijeliti sa 4. Izračunaj stranicu kvadrata koristeći predznanja o dijeljenju decimalnog broja s jednom decimalom s prirodnim brojem.
- Perimetar trougla, $L = 5,4 \cdot 2 + 4,7 = 10,8 + 4,7 = 15,5$ cm.
- Perimetar pravougaonika, $L = 5,4 \cdot 2 + 4,7 \cdot 2 = 10,8 + 9,4 = 20,2$ cm.

Zadatak 1

Na broj 328,4 dodaj stoti dio broja 61 267.

Primjer 2

Proizvod brojeva 3,26 i 1,8 umanji za 1,3.

Rješenje:

Iskorištavajući znanje o množenju prirodnih brojeva, broj 3,26 povećavamo 100 puta, a 1,8 povećavamo 10 puta i dobijamo:

$$(3,26 \cdot 100) \cdot (1,8 \cdot 10) = 326 \cdot 19 = 5868,$$

Proizvod 5868 je 1000 puta veći od proizvoda brojeva 3,26 i 1,8. Zašto 1000 puta?

Zato što 5868 smanjujemo 1000 puta, odnosno $5868 : 1000 = 5,868$ je proizvod brojeva 3,26 i 1,8.

Koliko decimalnih mjesta ima broj 5,868, tj. proizvod brojeva 3,26 i 1,8?

Ostaje da smanjiš proizvod 5,868 za 1,3, odnosno da izračunaš razliku $5,868 - 1,3$.

Dva decimalna broja množimo na sljedeći način: izostavimo decimalni zarez iz decimalnih brojeva i pomnožimo dobijene prirodne brojeve, a zatim u rezultatu izdvojimo s desna nalijevo onoliko decimalnih mjesta koliko ih zajedno imaju dati decimalni brojevi.

Primjer 3

Izračunaj: a) $5,46 : 2,5$ b) $6,4 : 10,24$

Rješenje:

- a) Da bismo podijelili dva decimalna broja, iskoristit ćemo predznanje o dijeljenju decimalnog broja s prirodnim brojem. Zato ćemo dijeljenje decimalnih brojeva svesti na dijeljenje decimalnog broja s prirodnim brojem.

Da bismo djelilac pretvorili u prirodan broj, djeljenik 5,46 i djelilac 2,5 množimo s 10.

Decimalni zarez kod oba broja pomiče se udesno za jedno mjesto i zadatak se svodi na dijeljenje decimalnog broja s prirodnim brojem. Dobijamo:

$$5,46 : 2,5 = (5,46 \cdot 10) : (2,5 \cdot 10) = 54,6 : 25$$

$$54,6 : 25 = 2,184$$

$$\begin{array}{r} -50 \\ 46 \\ -25 \\ \hline 210 \\ -200 \\ \hline 100 \\ -100 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$8 : 2 = 4$$

$$(8 \cdot 4) : (2 \cdot 4) = 32 : 8 = 4$$

Pokušaj i s drugim sličnim primjerima, što možeš zaključiti?

$$b) 6,4 : 10,24 = (6,4 \cdot 100) : (10,24 \cdot 100) = 640 : 1024$$

$$640 : 1024 = 0,625$$

$$\begin{array}{r} 6400 \\ -6144 \\ \hline 2560 \\ -2048 \\ \hline 5120 \\ -5120 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ponovo razmotri dijeljenje pod a i b. Kako se dijele decimalni brojevi?

Decimalni broj se dijeli s decimalnim brojem tako što djeljenika i djelitelja množimo s decimalnom jedinicom s onoliko nula koliko djelitelj ima decimalnih mjesta, a zatim dijelimo kao decimalni broj s prirodnim brojem (ili prirodni s prirodnim brojem). Kao rezultat ovog dijeljenja dobija se decimalni broj (konačan ili beskonačan).

Zadatak 2

Kolika je cijena jednog metra štofa za pantalone ako je za 2,5 m kupac platio 483,75 denara?

Primjer 4

Petra prodaje organsku hranu, ima 126,4 kilograma i želi da ih zapakuje. Ona planira da ih pakuje u pakovanja od po 0,25 kilograma.

- Koliko pakovanja će napraviti Petra?
- Koliko će zaraditi ako od jednog pakovanja ima zaradu od 1,03 eura?

Rješenje:

- Da bismo izračunali koliko pakovanja će napraviti Petra, treba da podijelimo ukupnu masu od 126,4 kg sa masom jednog pakovanja, 0,25 kg.

$$12640 : 25 = 505,6$$

$$\begin{array}{r} -125 \\ 140 \\ -125 \\ \hline 150 \\ -150 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dobijeni količnik 505,6 je decimalni broj, tako da za broj pakovanja (koji u svakom slučaju mora biti prirodan broj) treba da zaokružimo na cijeli dio i to naniže, odnosno Petra će pripremiti 505 pakovanja.

- b) Da bismo izračunali koliko će Petra zaraditi od prodaje 505 pakovanja organske hrane, treba da pomnožimo 505 sa 1,03, odnosno $505 \cdot 1,03 = 520,15$ eura.

U zavisnosti od konteksta problema, često je potrebno zaokruživanje decimalnih brojeva na cijeli broj (naviše ili naniže).

Primjer 5

Na školsku ekskurziju putuje 144 učenika. Ako svaki autobus kojim će se prevoziti ima kapacitet za 44 učenika, koliko autobusa je potrebno za organizaciju ekskurzije?

Rješenje:

$144 : 44 = 3,27$ i zaokružujemo na 4 autobusa kako bi bilo mjesta za sve učenike, iako neki od njih neće biti popunjeni do posljednjeg mjesta.

Zadatak 3

- a) Petar radi kao dizajner i zarađuje 4,25 eura na sat. Jednog dana radio je 6,4 sata. Koliko eura je zaradio tog dana?
- b) Kasnije, odlučio je zarađeni novac ravnomjerno podijeliti na 4 dana za dnevne troškove. Koliko eura će trošiti dnevno?

Zadatak 4

Krojač je imao 6 komada jedne vrste platna, svaki dug po 12,56 m. Od tog platna krojač je šio dječije haljinice, režući po 1,57 m za svaku haljinicu. Koliko haljinica je sašio krojač?

Zašto pri množenju decimalnih brojeva rezultat može imati više ili manje decimalnih mjesta od množilaca? Šta se dešava pri dijeljenju decimalnih brojeva – kako određujemo gdje će se nalaziti decimalni zarez u rezultatu?

Da procijeniš koliko dobro si savladao lekciju, odgovori u svesku na sljedeća pitanja sa „Da“, „Djelimično“ ili „Ne“:

1. Da li razumijem gdje se stavlja decimalni zarez pri množenju decimalnih brojeva?
2. Da li mogu pravilno dijeliti decimalni broj sa prirodnim brojem?
3. Da li znam kako da dijelim dva decimalna broja sa istim ili različitim brojem decimalnih mjesta?
4. Da li mogu da primijenim ove proračune u stvarnim situacijama?

Ako si na sva pitanja odgovorio sa „Da“, odlično si savladao lekciju!

Ako imaš „Djelimično“ ili „Ne“ kao odgovor, razmisli šta ti je najteže i potraži pomoć ili ponovo vježbaj.

Samostalni rad

1. Izračunaj:
a) $0,2 \cdot 0,3$ b) $0,7 \cdot 4,22$ c) $1,01 \cdot 6,9$ d) $0,072 \cdot 0,8$ e) $2,536 \cdot 1,55$
2. Izračunaj:
a) $6,26 \cdot 10 + 3,2 \cdot 0,5$ b) $0,98 \cdot 40 - 2,7 \cdot 6,16$
3. Ako jedna litra jestivog ulja u prodavnici košta 61,5 dinara, koliko je novca potrebno da se kupi kutija sa 16 boca od 1 litre?
4. Od jednog kilograma trave dobija se 0,23 kg sijena.
a) Koliko kilograma sijena će se dobiti od 23 436 kg trave?
b) Koliko novca će se dobiti od sijena ako se proda po cijeni od 20,5 dinara za 1 kg?
5. Izračunaj:
a) $7,5 : 5$ b) $0,3 : 3$ c) $4,5 : 9$ d) $4 : 0,2$ e) $28 : 0,4$
f) $12 : 0,006$ g) $10,5 : 0,5$ h) $146,3 : 41,8$ i) $9,2 : 0,46$ j) $37,37 : 5,05$
k) $79,2 : 2,88$
6. Putnik je prešao 28,305 km za 9 sati. Koliko je prosječno pješao za jedan sat?
7. Vrtljar je kupio pumpu za navodnjavanje za 7 589,34 dinara i još 41,4 metara crijeva. Po kojoj cijeni su mu naplatili po metru crijeva ako je ukupan račun iznosio 8 932,77 dinara?
8. Iz jedne cijevi za 8 sati iscuri 163,2 litra vode, a iz druge cijevi iscuri ista količina za 6 sati. Koliko vode će iscuriti iz obje cijevi za 21 sat?

Veza između razmjera i dijela cjeline

U svakodnevnom životu često se susrećeš s poređenjima između dijelova i cjeline, na primjer, kada pripremaš recept, praviš planove za gradnju ili porediš mape i stvarne udaljenosti. Ovu vezu izražavaš razmjerom i dijelom cjeline. Do sada si učio o dijelovima cjeline kroz razlomke, kao i o procentima. U ovoj lekciji ćeš otkriti da je razmjer usko povezan s tim pojmovima. Naučićeš kako da koristiš razmjer da izračunaš dio od date cjeline, ali i kako da iz datog dijela odrediš cjelinu.

Ovo znanje će ti pomoći da bolje razumiješ proporcionalnost, rješavaš praktične probleme i praviš tačne proračune u svakodnevnim situacijama.



Primjer 1

U jednoj učionici ima 30 učenika. Od njih 18 su djevojčice, a ostali su dječaci.

- U kakvom razmjeru (odnosu) je broj djevojčica i broj dječaka?
- U kakvom razmjeru je broj djevojčica u odnosu na ukupan broj učenika?
- U kakvom razmjeru je broj dječaka u odnosu na ukupan broj učenika?

Rješenje:

- Prvo ćemo izračunati broj dječaka: $30 - 18 = 12$. Dakle, u učionici ima 12 dječaka.
Razmjer (odnos) djevojčica u odnosu na dječake je $18 : 12$.
Pojednostavljujemo dijeljenjem oba broja sa 6: $(18 : 6) : (12 : 6) = 3 : 2$.
Dakle, odnos djevojčica i dječaka je $3 : 2$.
Pojednostavljivanje razmjera je slično kao skraćivanje razlomaka, do neskratljivog oblika.
- Razmjer djevojčica u odnosu na ukupan broj učenika je $18 : 30$.
Pojednostavimo dijeljenjem oba broja sa 6: $18 : 30 = 3 : 5$.
Dakle, razmjer djevojčica u odnosu na sve učenike je $3 : 5$.
- Razmjer dječaka u odnosu na ukupan broj učenika je $12 : 30$.
Pojednostavimo dijeljenjem oba broja sa 6: $12 : 30 = 2 : 5$.
Dakle, razmjer dječaka u odnosu na sve učenike je $2 : 5$.

Zadatak 1

U jednoj kutiji ima 9 crvenih i 6 plavih kuglica.

- Odredi razmjer crvenih i plavih kuglica.
- Odredi razmjer crvenih kuglica i ukupnog broja kuglica.
- Odredi razmjer plavih kuglica i ukupnog broja kuglica.

Primjer 2

Ana pravi integralne biskvite. Ona ima tanjir sa 24 kolačića i želi da ih podijeli tako da $\frac{1}{3}$ biskvita da svom bratu, a ostatak zadrži za sebe.

- Koliko će kolačića dobiti Anin brat?
- U kakvom su razmjeru kolačići koje je dobio brat u odnosu na sve kolačiće?
- U kakvom su razmjeru kolačići koje je zadržala Ana u odnosu na sve kolačiće?
- U kakvom su razmjeru kolačići brata i Anini kolačići?

Koja je veza sa razlomcima $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$?

Rješenje:

- Anin brat će dobiti $\frac{1}{3}$ od 24 kolačića. Znaš da umjesto riječi „od“ stavljamo množenje (podsjeti se lekcije o množenju razlomka prirodnim brojem, odnosno određivanju dijela od cjeline):
 $\frac{1}{3} \cdot 24 = \frac{1 \cdot 24}{3} = \frac{24}{3} = 8$ Dakle, brat dobija 8 kolačića.
- Kolačići koje je brat dobio u razmjeru su 8 : 24. Pojednostavimo: $8:24=(8:8):(24:8)=1:3$: 24 =
 $(8 : 8) : (24 : 8) = 1 : 3$: 24 = $(8:8):(24:8)=1:3$.
 Dakle, brat dobija 1 dio od 3.
- Ana zadržava preostale kolačiće: $24-8=16$. Razmjer kolačića koje je Ana zadržala prema svim kolačićima je $16:24=(16:8):(24:8)=2:3$. Dakle, Ana zadržava 2 dijela od 3.
- Razmjer kolačića brata prema Aninim kolačićima je $8 : 16 = 1$ (dio za brata) : 2 (dio za Anu). Znači, biskviti su podijeljeni na ukupno $1 + 2 = 3$ dijela.
 Očigledna je veza s razlomcima $\frac{1}{3}$ (brat dobija 1 od 3 dijela) i $\frac{2}{3}$ (Ana zadržava 2 od ukupno 3 dijela na koja su podijeljeni svi biskviti).

Zadatak 2

Vesna i Valbona žele da podijele 1800 denara u razmjeru 1 : 3. Izračunaj koliko će novca dobiti svaka od njih.

Primjer 3

Marko i Milena kupili su čokoladu sa 30 kockica i odlučili da je podijele u razmjeru 2 : 3 (za svake 2 kockice koje dobije Marko, Milena će dobiti 3).



- 
- a) Koliko kockica će dobiti svaki od njih?
- b) U kakvom razmjeru je broj kockica čokolade koje je uzео Marko i sve kockice čokolade?
- c) U kakvom razmjeru je broj kockica čokolade koje je uzela Milena i sve kockice čokolade?

Rješenje:

- a) Dati razmjer je $2 : 3$. Zbir dijelova u razmjeru je $2 + 3 = 5$.
Ukupan broj kockica je 30, znači u jednom dijelu ima $30 : 5 = 6$ kockica čokolade.
Marko dobija $2 \cdot 6 = 12$ kockica.
Milena dobija $3 \cdot 6 = 18$ kockica.
- b) Broj kockica koje je uzео Marko je u razmjeru $12 : 30$ sa svim kockicama čokolade.
Ako se razmjer skрати, dobije se $2 : 5$.
- c) Broj kockica koje je uzela Milena je u razmjeru $18 : 30$ sa svim kockicama čokolade.
Ako se razmjer skрати, dobije se $3 : 5$.
- Dodatno, odredi koliki dio od svih kockica čokolade je uzео Marko, a koliki dio je uzela Milena

Ako imaš 40 zastavica i treba da ih podijeliš između sebe i svog druga u razmjeru $3 : 5$, kako ćeš izračunati koliko zastavica će dobiti svako od vas? Možeš li objasniti zašto je ta podjela fer prema datom razmjeru?

Na kraju lekcije možeš se ocijeniti prema sljedećim kriterijima:

1. Mogu li prepoznati različite razmjere u datim primjerima?
(1 – ne mogu, 3 – mogu uz pomoć, 5 – mogu samostalno)
2. Mogu li podijeliti cjelinu prema datom razmjeru i izračunati broj dijelova?
(1 – ne mogu, 3 – mogu uz pomoć, 5 – mogu samostalno)
3. Mogu li primijeniti naučene vještine za podjelu količina u svakodnevnim primjerima (npr. podjela hrane, novca i sl.)?
(1 – ne mogu, 3 – mogu uz pomoć, 5 – mogu samostalno)
4. Mogu li objasniti kako razmjer utiče na to kako će se podijeliti cjelina?
(1 – ne mogu, 3 – mogu uz pomoć, 5 – mogu samostalno)

Nakon samoprocjene, možeš razgovarati o svojim rezultatima s nastavnikom ili s učenicima da poboljšaš svoje razumijevanje lekcije.

Samostalni rad

1. Na karti, rastojanje između dva grada je prikazano kao 5 cm. Ako je razmjer na karti 1 : 200000, kolika je stvarna udaljenost između gradova?
2. U receptu za kolače odnos brašna i šećera je 3 : 2. Ako se koristi 600 g brašna, koliko šećera je potrebno?
3. Dužina igračke automobila i njegova stvarna dužina su u razmjeru 1 : 10. Ako je dužina igračke 45 cm, kolika je stvarna dužina automobila?
4. Za pripremu soka proizvođač preporučuje da se miješa u razmjeru 1 : 4 (jedna čaša sirupa sa četiri čaše vode). Koliko sirupa je potrebno da se dobije 2 litra soka?
5. Fotografija dimenzija 15 cm · 10 cm treba da se poveća u istom razmjeru tako da njena dužina bude 30 cm. Kolika će biti širina povećane fotografije?
6. Azra svaki mjesec štedi $\frac{3}{5}$ svoje plate. Ako je njena plata 500 eura, koliko eura će uštedjeti za jedan mjesec?
7. Velika čokolada je podijeljena u razmjeru 2 : 3 između dvoje djece, Marije i Petra. Ako je Marija dobila 80 g, koliko je čokolade dobio Petar?
8. Da bi se obojio jedan zid, boja se treba miješati u razmjeru 3 : 5 (boja s vodom). Ako se koriste 3 litra boje, koliko litara vode je potrebno?
9. Jedan automobil je potrošio $\frac{2}{7}$ rezervoara, odnosno 14 litara goriva, nakon pređenih 140 km. Koliko litara goriva automobil troši na 100 km i koliki je ukupni kapacitet rezervoara?
10. Na izborima za članove učeničkog vijeća dva kandidata su dobila glasove u razmjeru 5 : 8. Ako je ukupan broj glasova 13 000, koliko glasova je dobio svaki od njih?
11. Ana i Bojan voze bicikle po različitim stazama, ali počinju u isto vrijeme. Ana i Bojan se kreću stalnim odnosom brzina 3 : 4, odnosno Bojan je brži. Ako je Ana prešla 18 km za određeno vrijeme, koliko kilometara je Bojan prešao u isto vrijeme?

Primjena pravoproporcionalnosti u realnim situacijama

U svakodnevnom životu često se susrećemo sa situacijama u kojima se jedna veličina mijenja u istom razmjeru s drugom. Na primjer, što više voća kupujemo, to ćemo više morati platiti; ili što duže putujemo istom brzinom, to ćemo veće rastojanje preći. Ovi primjeri se zasnivaju na matematičkom konceptu pravoproporcionalnosti.

U ovoj lekciji naučit ćeš kako da prepoznaš pravoproporcionalne veze i kako da ih primijeniš u realnim situacijama. Razumijevanje ovog koncepta pomoći će ti pri rješavanju različitih problema u svakodnevici, kao što su proračun t roškova, radno vrijeme, brzina, gustina i mnogi drugi praktični primjeri.



Primjer 1

Jedno dvorište dužine 50 metara treba podijeliti na dva dijela u razmjeru 4 : 1 za sadnju cvijeća i trave. Kolika će biti dužina svakog dijela?

Rješenje:

Razmjer 4 : 1 znači da je ukupan broj dijelova $4 + 1 = 5$. Dužinu dvorišta (50 metara) treba podijeliti na 5 jednakih dijelova.

Jedan dio je $50 : 5 = 10$ metara.

Dio za cvijeće (4 dijela) je $4 \cdot 10 = 40$ m, a dio za travu (1 dio) je $1 \cdot 10 = 10$ m.

Znači, dio za cvijeće bit će 40 metara, a dio za travu 10 metara. Zapiši razmjer dobijenih dužina dijelova s cvijećem i travom, a zatim ga pojednostavi. Šta primjećuješ?

Zadatak 1

Jakup je kupio $\frac{3}{7}$ ruža i $\frac{2}{7}$ karanfila od 49 cvjetova.

- Koliko ruža i karanfila je kupio Jakup?
- U kakvom su razmjeru ruže koje je kupio Jakup i svi cvjetovi?
- U kakvom su razmjeru karanfili koje je kupio Jakup i svi cvjetovi?

Primjer 2

Sofija čita knjigu stalnom brzinom. Za 2 sata pročitala je 60 stranica. Koliko stranica će pročitati za 5 sati ako nastavi istim tempom?

Rješenje:

Naravno, za više sati pri istom tempu Sofija će pročitati više stranica iz knjige. Broj pročitanih stranica pravoproporcionalan je vremenu koje Sofija provodi čitajući.

Računamo koliko stranica čita za 1 sat: $60 : 2 = 30$ stranica na sat. Za 5 sati pročitat će 5 puta više nego za 1 h, odnosno $30 \cdot 5 = 150$ stranica.

Ako Sofija čita $1\frac{1}{2}$ h, koliko stranica će pročitati? Hoće li se u ovom slučaju smanjiti ili povećati broj pročitanih stranica?

Proporcionalnost je veza između dvije veličine tako da se jedna mijenja u određenom razmjeru s drugom.

Pravoproporcionalnost je kada povećanje (ili smanjenje) jedne veličine vodi do proporcionalnog povećanja (ili smanjenja) druge veličine.

Zadatak 2

Materijal za zavjese dužine 8 metara košta 7192 dinara. Izračunaj koliko koštaju 15 metara materijala.

Primjer 3

35 djece putovalo je autobusom na ekskurziju u botaničku baštu. Svi su plaćali istu cijenu za autobusku kartu. Ukupna cijena za svih 35 učenika bila je 8400 dinara. Sljedećeg dana 42 učenika odlučila su da idu na ekskurziju. Kolika je ukupna cijena za 42 učenika ako cijena prevoza po učeniku ostaje ista?

Rješenje:

Ako je ukupna cijena za 35 učenika bila 8400 dinara, onda će za jednog učenika biti $8400 : 35 = 240$ dinara. Ukupna cijena za 42 učenika bit će $240 \cdot 42 = 10\,080$ dinara.

Zadatak 3

Troje drugara iz Hrvatske stigli su u Makedoniju na odmor. Oni su zamijenili nekoliko hrvatskih kuna (HRK) za makedonske denare (MKD). Svi su mijenjali novac po istom kursu. Valerija je zamijenila 600 HRK i dobila 4914 MKD.

- a) Karlo je zamijenio 900 HRK. Izračunaj koliko je denara dobio Karlo?
- b) Lana je dobila 5733 denara. Izračunaj koliko hrvatskih kuna je zamijenila Lana.

Zadatak 4

Jana često priprema palačinke za doručak po datom receptu za svoje četveročlano porodicu. Jednog dana došli su joj baka i djed na doručak. Zapiši koliko će joj biti potrebno od svakog sastojka da napravi palačinke za 6 osoba.

Za 4 osobe:
2 jaja, 600 ml mlijeka,
1 mala kašičica sode bikarbone,
 $\frac{1}{2}$ čaše šećera i 400 g brašna

Zamisli da planiraš putovanje biciklom. Ako znaš da se pri stalnoj brzini možeš kretati 24 km za 2 sata, kako bi izračunao potrebno vrijeme da stigneš do odredišta od 60 km istom brzinom? Možeš li objasniti zašto je ova situacija primjer pravoproporcionalnosti?

Na kraju lekcije razmisli o svom razumijevanju koncepta pravoproporcionalnosti i ocijeni se prema sljedećim pitanjima. Za svaku tvrdnju izaberi:

Da ☒ | ☐ Djelimično | ☒ Ne

1. Mogu prepoznati situaciju iz stvarnog života u kojoj postoji pravoproporcionalnost.
2. Mogu izračunati nepoznatu vrijednost u pravoproporcionalnoj vezi.
3. Mogu svojim riječima objasniti zašto su dvije veličine u pravoproporcionalnoj vezi.
4. Znam primijeniti pravoproporcionalnost u različitim kontekstima (trgovina, vrijeme, putovanje, kuhanje i sl.).

Ako imaš više ☒ – odlično savladavaš ovu lekciju!

Ako imaš više ☐ – ponovi zadatke i potraži pomoć za nejasne dijelove.

Ako imaš više ☒ – ponovno pročitaj lekciju i vježbaj s dodatnim primjerima.

Izazov: Osmisli primjer iz svakodnevnog života u kojem možeš primijeniti pravoproporcionalnost i podijeli ga sa svojim vršnjacima!

Samostalni rad

1. U marketu 2 kilograma narandži koštaju 180 dinara. Koliko koštaju 5 kg narandži?
2. Automobil troši 8 l goriva na svakih 100 km. Koliko litara goriva će potrošiti za 250 km?
3. Petar čita 30 stranica iz knjige za 40 minuta. Koliko vremena mu je potrebno da pročita 75 stranica ako čita istim tempom?
4. Jedna štamparija štampa po 500 knjiga za 4 dana. Koliko knjiga će odštampati za 10 dana ako brzina štampanja ostane ista?
5. Fabrika proizvodi 2400 maski za 8 sati. Koliko maski će proizvesti za 5 sati ako cijelo vrijeme radi istim intenzitetom?
6. Za bojenje 20 m^2 zida potrebna su 4 l boje. Koliko litara boje je potrebno da se oboji 50 m^2 zida?
7. U jednom hotelu 3 sobe koštaju 12 000 dinara za jednu noć. Koliko koštaju 5 soba za jednu noć ako je cijena po sobi ista?
8. Recept za picu kaže da su za tijesto za 4 pice potrebne 2 čaše brašna. Koliko čaša brašna će biti potrebno da se napravi 10 pica ako se koristi isti razmjer?
9. Anita se priprema da pravi kolače i za to su joj potrebne određene količine sastojaka u zavisnosti od broja porcija. Za 5 porcija kolača potrebni su: 200 g šećera, 150 g brašna i 2 jajeta. Napravi tabelu da odrediš koliko šećera, brašna i jaja će biti potrebno za 3, 7 i 12 porcija kolača?

T E M A

2

GEOMETRIJA



Riječ geometrija potiče od starogrčkih riječi „geo“ što znači zemlja i „metrija“ što znači mjerenje. Bukvalno, geometrija označava mjerenje zemlje. U davna vremena ljudi su razvili geometriju kako bi mjerili njive, gradili puteve, hramove i građevine, te razumjeli oblik svijeta oko sebe.

Danas je geometrija jedna od najstarijih, ali i najživljih grana matematike. Ona nam omogućava da istražujemo oblik, veličinu, položaj i odnose među različitim geometrijskim figurama, kao što su tačke, prave, uglovi, trouglovi, krugovi i tijela u prostoru.

„Nema kraljevskog puta do geometrije.“

Rezultati učenja

Nakon izučavanja ove teme bit ćeš sposoban/sposobna da:

- koristiš pojmove kružnica, krug, kružni luk, međusobni položaj kružnice i tačke, kružnice i prave, dvije kružnice, u svakodnevnom kontekstu;
- rješavaš probleme iz svakodnevnog konteksta koristeći pojmove tačka, prava, poluprava i duž;
- koristiš mjerenje uglova, mjerne jedinice za uglove, centralni ugao i uglove na transverzali u rješavanju problema iz svakodnevnog konteksta;
- prepoznaješ, upoređuješ i koristiš svojstva 2D oblika u svakodnevnim situacijama;
- konstruišeš trougao, upisanu i opisanu kružnicu kod trougla pri datim uslovima;
- koristiš osnu simetriju, rotaciju oko date tačke i translaciju pri rješavanju problema.

Kružnica i krug

Očigledno je da se u svakodnevnom životu često susrećemo s oblicima koji su povezani s kružnicama i krugovima – točkovi bicikla, satovi, stolovi, pa čak i putanje kretanja planeta. U ovoj lekciji ćeš ponoviti i produbiti znanja o kružnici, krugu i njihovim međusobnim položajima s tačkama, pravama i drugim kružnicama, te ćeš naučiti kako se ovi koncepti koriste za rješavanje praktičnih problema.



Primjer 1

U svojoj svesku crtaj prema sljedećim uputama:

1. Nacrtaj kružnicu k :
 - Označi centar kružnice slovom, na primjer, O .
 - Poveži centar kružnice s jednom tačkom kružnice. Zapiši kako se zove to rastojanje i označi ga slovom.
 - Poveži dvije tačke kružnice tako da dobijena duž prolazi kroz centar kružnice. Kako se zove to rastojanje? Označi ga slovom.
2. Dodaj tačke:
 - Izaberi jednu tačku unutar kružnice i označi je sa M ($\overline{OM} < r$).
 - Izaberi jednu tačku na kružnici i označi je sa ($\overline{OA} = r$).
 - Izaberi jednu tačku izvan kružnice i označi je sa ($\overline{OP} > r$).
3. Nacrtaj prave:
 - Nacrtaj pravu a koja dodiruje kružnicu samo u jednoj tački T ($a \cap k = \{T\}$).
 - Nacrtaj pravu s koja siječe kružnicu u tačkama A i B ($s \cap k = \{A, B\}$).
 - Nacrtaj pravu m koja ne dodiruje kružnicu ($m \cap k = \emptyset$).
4. Nacrtaj drugu kružnicu:
 - Nacrtaj kružnicu koja dodiruje prvu kružnicu i označi je.
 - Nacrtaj kružnicu koja siječe prvu kružnicu i označi je.
 - Nacrtaj kružnicu koja nema zajedničkih tačaka s prvom kružnicom i označi je.Koliko rješenja ima?

Primjer 2

Prikaži različite međusobne položaje kružnica i pravih pomoću geometrijskog softvera.

Napomena: Ako nemaš pristup odgovarajućem softveru za crtanje, crtaj u svojoj svesci pomoću geometrijskog pribora.

Rješenje:

- Prikaži međusobni položaj dviju kružnica koje se dodiruju.
 - Izmjeri rastojanje između centara tih kružnica odgovarajućim alatom iz aplikacije i uporedi ga sa zbirom radijusa obje kružnice.
Šta primjećuješ?
 - Pomjerajući centar jedne od kružnica, primijeti kako se mijenjaju rastojanja između centara kružnica u poređenju sa zbirom njihovih radijusa.
- Uputstvo za rad: Kako da ovo uradiš u GeoGebra?
- Aktiviraj GeoGebra i izaberi opciju za crtanje.
 - Crtanje kružnice:
 - Izaberi alat za kružnicu i postavi centar kružnice izborom tačke na površini za crtanje (izaberi centar ručno ako crtaš priborom).
 - Zatim, u zavisnosti od izbora iz padajućeg menija alata za crtanje kružnice, završi postupak crtanja kružnice.
Najbolje bi bilo da izabereš tačku na kružnici kojom ćeš odrediti njen radijus.
 - Pomjeranje tačke i mjerenje rastojanja:
 - Kreiraj tačku (na primjer, tačku C) unutar ili izvan kružnice.
 - Pomjeraj tačku odgovarajućim alatom i koristi alat za mjerenje rastojanja da vidiš kako se mijenja rastojanje od tačke do centra kružnice.
Uporedi ga sa radijusom kružnice.
- Napravi uopštene zapise u vezi sa svojim saznanjima.

Primjer 3

Na kružnici k (O , r) izabrane su tačke A, B, C i D (crt. 1). Na koliko dijelova tačke A i B dijele kružnicu?

Rješenje:

Tačke A i B, kao što se vidi na crtežu, dijele kružnicu na dva dijela, jedan koji sadrži tačku C i drugi koji sadrži tačku D.



Dio kružnice ograničen sa dvije njene tačke, zajedno sa tim tačkama, nazivamo kružni luk.

Dvije različite tačke jedne kružnice određuju dva kružna luka.

Da bismo pravili razliku između dva kružna luka koja određuju dvije različite tačke jedne kružnice, za njihovo označavanje ćemo koristiti tri velika slova: njegove dvije granične tačke i jednu tačku na kružnici kojom je određen taj kružni luk.

Dva kružna luka sa crt. 1 označavamo sa $\overline{ACB}$ i $\overline{ADB}$.

Zadatak 1

Date su dvije kružnice $k_1 (O_1, 4 \text{ cm})$ i $k_2 (O_2, 3 \text{ cm})$. U kakvom međusobnom položaju su te dvije kružnice ako je rastojanje između njihovih centara:

- a) $\overline{O_1O_2} = 7 \text{ cm}$
- b) $\overline{O_1O_2} = 5 \text{ cm}$
- c) $\overline{O_1O_2} = 9 \text{ cm}$

Objasni svoj odgovor.

Zadatak 2

Nacrtaj kružnicu sa radijusom od 35 mm, a zatim označi kružni luk koji odgovara tetivi dužine: a) 40 mm, b) 3 cm, c) jednak prečniku kružnice.

Primjer 4:

U jednom parku treba da se postave dvije kružne fontane. Jedna fontana ima radijus od 5 metara, a druga radijus od 7 metara. Na kojem rastojanju mogu biti centri ovih fontana da bi:

- a) obje fontane bile van jedna druge,
- b) obje fontane se dodirivale spolja,
- c) manja fontana bila unutar veće fontane i dodirivala je iznutra.

Rješenje:

- a) Ako rastojanje centara fontana označimo sa c , tada da bi obje fontane bile van jedna druge, treba da važi $c > r_1 + r_2$, odnosno rastojanje između centara fontana treba da bude veće od zbira radijusa obje kružnice. Nacrtaj!

- b) Da bi se dvije fontane dodirivale, rastojanje između centara fontana treba da bude jednako zbiru radijusa fontana, odnosno $c = r_1 + r_2$. Nacrtaj!
- c) Da bi manja fontana bila unutar veće fontane i dodirivala je iznutra, rastojanje između centara fontana treba da bude jednako razlici radijusa fontana, odnosno $c = r_2 - r_1$, gdje je $r_1 < r_2$ (crt. 2).



Zadatak 3

Točak bicikla ima radijus od 35 cm.

- Nacrtaj kružnicu koja predstavlja točak bicikla i na njoj označi centar kružnice. U tvojoj svesci radijus neka bude 3,5 cm (podsjeti se na razmjer).
- Izmjeri dužinu dijametra bicikla. A kolika je stvarna veličina?
- Nacrtaj radijus točka bicikla i označi ga slovom.
- U kakvom međusobnom položaju su unutrašnji i vanjski rub gume?

U jednom gradu dva radio-televizijska predajnika postavljena su na određenoj udaljenosti jedan od drugog. Prvi predajnik ima antensku površinu koja stvara signal sa radijusom od 3 kilometra, dok drugi predajnik stvara signal sa radijusom od 4 kilometra. Dva predajnika postavljena su na rastojanju od 5 kilometara jedan od drugog.

- Odredi da li postoji preklapanje signalnih područja, odnosno signala oba predajnika.
- Za bolji prijem, ne bi trebalo da postoji preklapanje i miješanje signala oba predajnika. Na kojem rastojanju se mogu postaviti predajnici da bi prijem bio bez miješanja signala?

Odgovori u svesku. Za tvrdnje na koje je odgovor DA – navedi primjer, a za tvrdnje za koje je odgovor NE vrati se na primjere i zadatke koji se odnose na te tvrdnje.

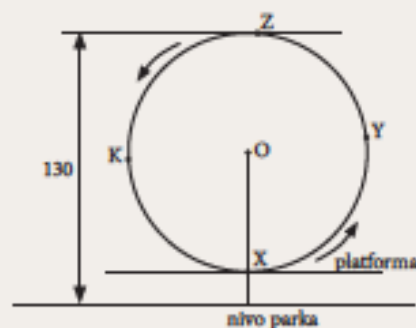
- Mogu da identifikujem tačku kao unutrašnju tačku u kružnici, vanjsku tačku kružnice ili tačku na kružnici. DA/NE
- Mogu da odredim da li prava dodiruje ili siječe kružnicu. DA/NE
- Mogu da odredim međusobni položaj dviju kružnica. DA/NE
- Mogu da objasnim šta je kružni luk. DA/NE
- Mogu da označim kružni luk na datoj kružnici. DA/NE

Samostalni rad

1. Nacrtaj kružnicu $k(O, r)$. Nacrtaj i označi radijus te kružnice sa OA i dijametrom AB . Koje od tvrdnji su tačne?
a) Radijus je polovina prečnika. b) Prečnik je veći od radijusa.
c) Prečnik je jednak radijusu. d) Radijus je dvostruko veći od prečnika.
2. Nacrtaj $k(O, 6 \text{ cm})$. Nacrtaj tetivu BC dužine 8 cm. Izmjeri i odgovori kolika je udaljenost od centra kružnice do tetive?
a) Udaljenost je 4 cm. b) Udaljenost je 6 cm.
c) Udaljenost je 8 cm d) Udaljenost je 4,5 cm.
3. Tačka A se nalazi na 6 cm od centra O kružnice sa radijusom od 5 cm. Šta od sljedećeg je tačno za položaj tačke A ?
a) Tačka A se nalazi na kružnici.
b) Tačka A se nalazi unutar kružnice.
c) Tačka A se nalazi izvan kružnice.
d) Tačka A je na prečniku kružnice.
4. Dvije kružnice imaju centre u tačkama O i P . Prva kružnica ima radijus od 5 cm, a druga ima radijus od 7 cm. Kakav će biti međusobni položaj ovih dviju kružnica ako je rastojanje između njihovih centara 12 cm?
a) Kružnice će se dodirivati spolja. b) Kružnice će se sjeći.
c) Jedna kružnica će biti unutar druge. d) Kružnice će se dodirivati iznutra.
5. Dva pogonska točka imaju različite radijuse i rastojanje između centara 50 cm. Radijus jednog točka je 15 cm, a drugog 25 cm.
a) Nacrtaj kružnicu svakog od dva točka (koristi razmjer).
b) U kakvom međusobnom položaju su kružnice? Objasni zašto.
6. Nacrtaj $k(O, 4 \text{ cm})$, zatim nacrtaj radijus $\overline{OM}$, tetivu $\overline{MN}$ i označi veći kružni luk koji odgovara toj tetivi. Na kraju povuci prečnik čije krajnje tačke su dvije tačke označenog kružnog luka.
7. Nacrtaj dvije paralelne prave i kružnicu koja dodiruje obje prave. Koliki radijus ima dobijena kružnica? Koja je veza radijusa kružnice sa rastojanjem između dvije prave?
8. Na šanku u restoranu koji ima oblik pravougaonika dimenzija 2 dm i 2 m treba da se poredaju tanjiri kružnog oblika čiji su prečnici 5 dm, 1 dm, 1,5 dm, 2 dm. Koliko najviše tanjira može da se poreda duž šanka ako treba da se stavi najmanje po jedan tanjir svake veličine?

9. Marko i Ana se nalaze u parku i svaki od njih ima svoj krug za igru. Krug Marka ima radijus od 5 metara, a krug Ane radijus od 3 metra. Centri dvaju krugova udaljeni su 6 metara jedan od drugog.
- Da li se krugovi Marka i Ane sijeku? Napravi crtež u razmjeru da bi odgovorio na pitanje.
 - Ako se centar Aninog kruga pomjeri za 2 metra bliže centru Markovog kruga, hoće li se krugovi više ili manje preklapati? Objasni.
10. U Betinom dvorištu ima kružna cvjetna gredica s radijusom od 8 metara. Staza prolazi kroz dvorište i nalazi se na udaljenosti od 6 metara od centra gredice. Da bi pomogao/pomogla Beti pri uređenju dvorišta, odgovori na pitanja i potkrijepi objašnjenje crtežom (koristi svoja predznanja o razmjeru).
- Da li staza siječe kružnicu gredice? Ako da, kolika je dužina dijela staze koji prolazi kroz gredicu?
 - Hoće li staza sjeći kružnicu cvjetne gredice ako se pomjeri za 2 metra dalje od centra gredice? Objasni svoj odgovor.
 - Hoće li staza sjeći kružnicu cvjetne gredice ako se pomjeri za 2 metra bliže centru gredice? Objasni svoj odgovor.
11. Nacrtaj kružnicu k (O , 3 cm), a zatim nacrtaj radijus $\overline{OM}$, prečnik $\overline{MN}$, tetivu $\overline{AB}$ i luk $\widehat{ACB}$.

12. U centru gradskog parka uzdiže se spektakularno točak koje nudi predivan pogled na okolinu (vidi crtež).
- Prečnik točka iznosi 120 m.
 - Najviša tačka točka je na 130 m iznad nivoa parka.
 - Točak rotira u smjeru koji pokazuju strelice.
- Tačka O na crtežu predstavlja centar točka. Na kojoj visini (u metrima) iznad nivoa parka nalazi se tačka O ?
 - Točak se kreće stalnom brzinom i za jedan puni krug potrebno je 50 minuta. Mila ulazi u kabinu na početnoj poziciji X i započinje vožnju. Gdje će se Mila nalaziti nakon 25 minuta?
 - U tački Y
 - Između tačaka Y i Z
 - U tački Z
 - Između tačaka Z i X
 - Kolika je dužina puta koju će preći kabina Mile za 25 minuta, ako je dužina kružnice pri jednom cijelom okretu 377 m? Kako se zove dio kružnice koji će preći Mila?



Tangenta kružnice

Tangenta je jedan od najzanimljivijih pojmova u geometriji. Svakodnevno je susrećemo u arhitekturi, transportu i tehnologiji. U ovoj lekciji ćeš naučiti šta je tangenta na kružnicu, kako da je prepoznaš, pravilno nacrtas i kako se tangenta može primijeniti pri rješavanju zadataka u realnom kontekstu.



Primjer 1

Na slici je prikazan most koji se proteže nad rijekom. Njegova glavna noseća konstrukcija ima oblik kružnog luka. Iznad tog luka nalazi se prava platforma po kojoj se mogu kretati vozila ili pješaci.



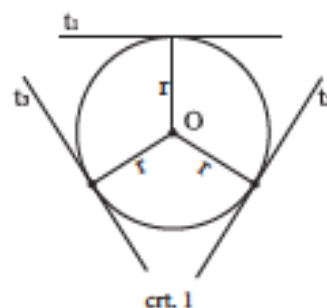
- U kakvom međusobnom položaju se nalaze kružni luk mosta i prava platforma koja se proteže po njegovoj gornjoj strani?
- Zamislite da je noseća konstrukcija dio cijelog kruga. Možeš li naći sličnost s nekom položajem između kružnice i prave koju ste učili na časovima matematike?

Tangenta kružnice je prava koja ima jednu zajedničku tačku s kružnicom, nazvanu tačka dodira.

Primjer 2

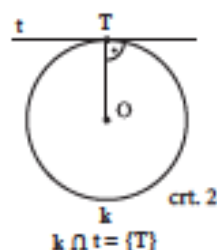
U tvojoj svesci nacrtaj kružnicu sa proizvoljnim radijusom i centrom O . Zatim nacrtaj najmanje 2 različite prave koje su na rastojanju od centra kružnice koje je jednako radijusu tvoje kružnice (crt. 1).

- Kakav međusobni položaj zauzima svaka od nacrtanih pravih s kružnicom?
- Za svaku tangentu poveži tačku dodira s centrom kružnice. Izmjeri ugao koji svaka tangenta zahvata s radijusom dobijenim povezivanjem njene dodirne tačke s centrom kružnice. Šta možeš zaključiti iz svog istraživanja?



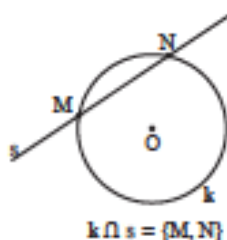
- c) Nacrtaj kružnicu $k(O, r)$ i radijus $\overline{OT}$ gdje je T proizvoljna točka kružnice. Nacrtaj tangentu na kružnicu koja prolazi kroz točku T .

Tangenta kružnice je normalna na radijus kružnice koji povezuje centar kružnice s njenom točkom dodira.



Primjer 3

Na kružnici $k(O, r)$ izaberi 2 točke M i N kroz koje će prolaziti sekanta te kružnice.



Prava koja siječe kružnicu zove se sekanta.

Zadatak 1

U jednom gradu planira se izgradnja novog trga. Na trgu će biti velika fontana u obliku kružnice. Radijus fontane je 8 metara. Planirano je postaviti stazu koja će biti tangenta na kružnicu fontane.

- Na kojoj udaljenosti je staza od centra fontane?
- Napravi crtež. Kako ćeš nacrtati stazu? Pri crtanju koristi razmjer.

Primjer 4

U jednom parku postoji velika cvjetna leja kružnog oblika. Treba postaviti dekorativni kamen u točki P koja je izvan kružnice cvjetne leje. Zatim se planira postaviti staza koja će prolaziti preko dekorativnog kamena i dodirivati cvjetnu leju u jednoj točki. Kako nacrtati stazu koja će prolaziti kroz točku P (dekorativni kamen) i biti tangenta na leju? Koji je tačan metod za crtanje ove staze, koristeći samo geometrijski trougao i lenjir?

Rješenje:

- Prvo, nacrtaj cvjetnu leju (kružnicu) sa centrom u točki O i radijusom r .
- Označi točku P (dekorativni kamen) izvan kružnice.
- Geometrijskim trouglom i lenjirom nacrtaj tangentu koja će prolaziti kroz točku P i dodirivati kružnicu u točki T . Koliko takvih staza se može postaviti? Kako ćeš provjeriti da li je precizno nacrtana staza koja prolazi kroz dekorativni kamen i dodiruje fontanu?

Iz date tačke izvan kružnice mogu se konstruisati tačno dvije tangente do kružnice.

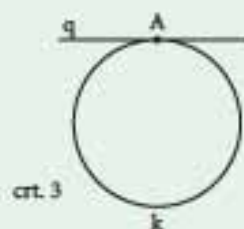
U ovoj lekciji očekuje se da nacrtáš crtež pomoću lenjira.

Primjer 5

Staza za vozila projektovana je kao kružnica s radijusom od 50 m. Zaštitna ograda za ovu stazu treba biti prava koja će dodirivati stazu na tačno određenom mjestu. Prikaži stazu i zaštitnu ogradu crtežom.

Rješenje:

Crtežom je predstavljena kružnica (kružna staza) i zaštitna ograda koja dodiruje stazu u tački A.



Zadatak 2

Pri izgradnji skejt-poligona kružnog oblika s radijusom od 10 m, na udaljenosti od 25 m od centra te kružnice postavljen je putokaz. Od putokaza do skejt-poligona planirane su dvije staze koje će dodirivati kružnicu skejt-poligona. Kolike su dužine tih staza?

Uputstvo: Koristi razmjer, prikaži situaciju crtežom, a zatim mjerenjem odredi dužinu tih staza.

1. Koja je razlika pri crtanju tangente na kružnicu kada treba da je povučesh:
 - a) kroz tačku na kružnici
 - b) kroz tačku izvan kružnice.Prikaži oba slučaja crtežom.
2. Kolika je udaljenost od centra kružnice do zajedničke tačke/tačaka s tangentom (sekantom) u poređenju s radijusom te kružnice?

Odgovori na pitanja u svojoj svesci:

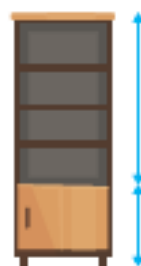
- Da li mogu prepoznati tangentu na kružnicu? DA/NE
 - Da li mogu nacrtati tangentu iz date tačke? DA/NE
 - Da li mogu primijeniti tangente u praktičnim situacijama? DA/NE
- Objasni svoj odgovor.

Samostalni rad

- U parku u obliku kruga s radijusom od 30 metara planira se postaviti rasvjeta na 5 metara od ruba (kružnice) parka. Koja od sljedećih dužina predstavlja radijus kružnice koju čine rasvjetna tijela?
 - 25 metara
 - 35 metara
 - 30 metara
 - 20 metara
- Na kružnoj biciklističkoj stazi s prečnikom od 30 metara treba izgraditi izlaz koji će biti tačka dodira staze koja vodi do susjedne staze. Kolika je udaljenost od centra kružne staze do izlaza?
 - 0 metara
 - 15 metara
 - 30 metara
 - 20 metara
 - Koje svojstvo tangente će pomoći u dizajnu staze od izlaza staze?
 - Ako se dužina radijusa biciklističke staze poveća na 20 metara, da li izlaz biciklističke staze ostaje dodirna tačka staze koja treba da se napravi do susjedne staze?
- Fontana u parku ima oblik kružnice s radijusom od 12 metara. Počevši od tačke A koja je na 15 metara od centra kružnice treba postaviti stazu koja će biti njena tangenta.
 - Koja od sljedećih dužina je jednaka udaljenosti od centra kružnice do dodirne tačke tangente i kružnice?
 - 10 m
 - 12 m
 - 15 m
 - 20 m
 - Koja od sljedećih dužina je jednaka udaljenosti od tačke A do dodirne tačke tangente i kružnice? Koristi crtež u razmjeru.
 - 5 m
 - 8 m
 - 9 m
 - 10 m

Grafičko sabiranje i oduzimanje duži

Sabiranje i oduzimanje duži osnovni su dio geometrije koji se koristi u mnogim praktičnim situacijama. U ovoj lekciji naučit ćeš kako sabirati i oduzimati duži koristeći šestar. Dodatno, naučit ćeš razlikovati kolinearne tačke i kako konstruisati duž jednaku dužini datoj dužini. Ova tehnika će ti omogućiti precizno konstruisanje duži i primjenu znanja u različitim situacijama.



Primjer 1

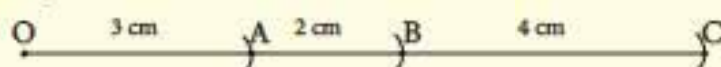
Tomislav želi ići od kuće do svoje škole, ali na putu ima dvije stanice na kojima mora stati, a to su: stanica A i stanica B.

- Udaljenost od njegove kuće do stanice A je 3 km.
- Udaljenost od stanice A do stanice B je 2 km.
- Udaljenost od stanice B do škole je 4 km.

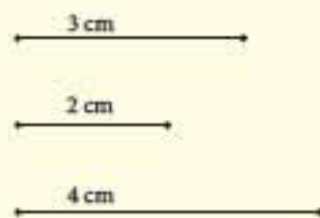
- Nacrtaj duži koje predstavljaju put od kuće Tomislava do škole, preko stanica A i B.
- Izračunaj ukupnu udaljenost (grafički i aritmetički) koju Tomislav treba preći da bi stigao do škole.
- Ako je Tomislav prešao put od kuće do stanice A, koliko kilometara mu još ostaje do škole?

Rješenje:

- U kojem razmjeru su nacrtane udaljenosti?
- $3 \text{ km} + 2 \text{ km} + 4 \text{ km} = 9 \text{ km}$. Tomislav treba preći 9 km da bi stigao do škole.



- $9 \text{ km} - 3 \text{ km} = 6 \text{ km}$. Ako je Tomislav prešao put od kuće do stanice A, tada mu je do škole ostalo još 6 km.



Primjer 2

Jedan inženjer treba postaviti rasvjetu za osvijetljavanje staze u parku. Staza je prava linija, a inženjer planira postaviti tri svjetiljke na određenim pozicijama.

- Svjetiljka A treba biti postavljena lijevo na stazi.
- Svjetiljka B treba biti postavljena na sredini između A i C.
- Svjetiljka C treba biti postavljena desno na stazi.

- Nacrtaj pravu koja predstavlja stazu i označi tačke A, B i C.
- Provjeri da li su svjetiljke A, B i C na istoj pravoj.
- Ako je udaljenost od A do B 5 metara, izračunaj udaljenost od A do C.

Rješenje:

-
- Tačke A, B i C su na istoj pravoj.

Za tačke koje leže na istoj pravoj kaže se da su kolinearne tačke.

- c) Udaljenost od tačke A do tačke C (ako su tačke A, B i C kolinearne i tačka B je između tačaka A i C) jednaka je zbiru udaljenosti od tačke A do tačke B i od tačke B do tačke C: $5\text{ m} + 5\text{ m} = 10\text{ m}$.
Udaljenost od tačke A do tačke C je 10 metara, odnosno $= 10\text{ m}$.

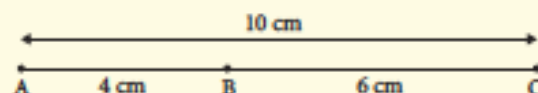
Primjer 3

Da li su tačke A, B i C kolinearne ako:

- a) $\overline{BC} = 6\text{ cm}$, $\overline{AC} = 10\text{ cm}$, $\overline{AB} = 4\text{ cm}$ b) $\overline{BC} = 4\text{ cm}$, $\overline{AC} = 12\text{ cm}$, $\overline{AB} = 10\text{ cm}$

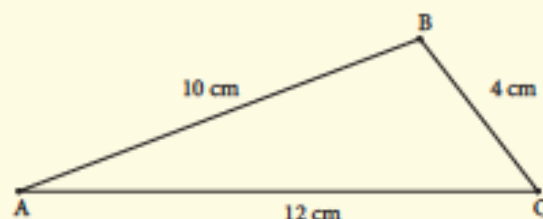
Rješenje:

- a) Ako grafički saberemo dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, dobit ćemo duž $\overline{AC}$, odnosno $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.
To je prikazano i crtežom.



Tačke A, B i C su kolinearne.

- b) U ovom slučaju nijedno od rastojanja ne možeš predstaviti kao zbir druga dva rastojanja, pa tačke A, B i C nisu kolinearne. $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$.



Za bilo koje tri tačke M, N i P važi: Rastojanje od tačke M do P nije veće od zbira rastojanja od M do N i od N do P, odnosno $\overline{MP} \leq \overline{MN} + \overline{NP}$.

Primjer 4

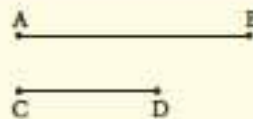
Jana želi da ogradom ogradije dvije bašte u obliku kvadrata s različitim dužinama stranice. Nakon mjerenja dužina stranica utvrdila je:

- Prva bašta ima stranicu $\overline{AB} = 5\text{ m}$.
- Druga bašta ima stranicu $\overline{CD} = 3\text{ m}$.

Jana želi da spoji ove dvije duži u jednu (ukupna dužina ograde), ali takođe želi da zna koliko je duža stranica AB od stranice CD.

Rješenje:

a) Lenjirom crtamo duži $\overline{AB} = 5$ m i $\overline{CD} = 3$ m.



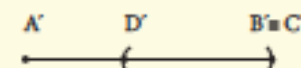
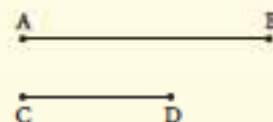
b) Da bi i ti mogao/mogla konstruisati duž kao zbir dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, radi kao Jana:

- Šestarom izmjeri dužinu duži $\overline{AB}$.
- Prenesi tu duž na polupravu koju ćeš nacrtati, označavajući je kao $A'B'$ (pritom se tačka A' postavlja kao početna tačka poluprave).
- Šestarom izmjeri duž $\overline{CD}$.
- Prenesi tu dužinu s početkom u B' (igla šestara se postavlja u B' , dobija se $B' \equiv C'$). Zatim drugim dijelom šestara – olovkom iscrtavamo kružni luk na polupravi, označavajući novu tačku kao D').
- Nova duž $A'D'$ imaće dužinu jednaku zbiru dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, $A'D' = \overline{AB} + \overline{CD}$.



c) Da bi konstruisala duž jednaku razlici duži $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, Jana radi sljedeće korake, pa ih slijedi i uradi i ti:

- Nacrtaj polupravu i odaberi početnu tačku A' .
- Šestarom izmjeri dužinu dužine $\overline{AB}$.
- Prenesi tu dužinu na polupravu, označavajući je kao $A'B'$.
- Šestarom izmjeri dužinu duži $\overline{CD}$.
- Postavi iglu šestara u tačku B' i iscrtaj luk na dužini, ali s olovkom šestara prema tački A' ($B' \equiv C'$).
- Tačku u kojoj luk siječe duž $A'B'$ označi kao D' .
- Nova dužina $A'D'$ imaće dužinu jednaku razlici dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, odnosno $A'D' = \overline{AB} - \overline{CD}$.



Zadatak 1

Dat je pravougaonik sa dužinama stranica 2 cm i 3 cm.
Grafički izračunaj obim pravougaonika.

Zadatak 2

Ana planira kupiti dva komada namještaja za svoju dnevnu sobu:

- Jedan trosjed dužine $\overline{AB} = 2$ m.
- Jednu fotelju dužine $\overline{CD} = 1,5$ m.

- U razmjeru nacrtaj duži $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ koje predstavljaju dužine namještaja.
- Konstruiraj novu duž čija je dužina ukupna dužina namještaja (trosjeda i fotelje).

- c) Ako je dužina zida u dnevnoj sobi 5 m, izračunaj hoće li ostati prostora na zidu ako Ana postavi oba komada namještaja na isti zid, jedno pored drugog.
- d) Ako je dužina najdužeg zida 5 m, a Ana na toj strani prostorije postavi samo trosjed, kolika dužina ostaje za neki drugi komad namještaja?

Zadatak 3

David ima cvjetnu gredicu u obliku pravougaonika. Dužina jedne stranice je $\overline{AB} = 4$ m, a dužina druge stranice je $\overline{CD} = 3$ m.

- a) U razmjeru nacrtaj duži $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ koje predstavljaju stranice gredice.
- b) Konstruiraj novu duž čija je dužina ukupna dužina duži $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$.
- c) Odredi konstrukcijom – koliko ukupno metara ograde će Davidu trebati ako postavi ogradu oko cijele gredice? (Uključi sve četiri stranice).



Kako tačno mjerenje i određivanje dužine duži može utjecati na proces dizajniranja namještaja ili predstavljanje udaljenosti na mapi? Objasni zašto je važno koristiti tačne mjerne alate, kao što su lenjir ili šestar, i kako to može poboljšati rezultate u realnim situacijama, kao što su izrada namještaja ili mjerenje udaljenosti.

Zapiši odgovore u svoju svesku. Za ono u što nisi siguran u svojim znanjima, vrati se na one dijelove lekcije.

- Mogu li sabirati i oduzimati duži šestarom?
- Da li razumijem razliku između grafičkog i aritmetičkog sabiranja i oduzimanja duži?
- Kako mogu primijeniti ovo znanje u praktičnim situacijama?

Samostalni rad

U nekim zadacima postoji potreba za korištenjem razmjera.

1. U jednoj ulici ima prostor za parkiranje automobila. Dužina parkinga je 24 metra, a dužina jednog automobila je 4 metra. Ako između dva automobila treba da postoji minimalna udaljenost od 1 metar, grafički prikaži kako će izgledati raspored automobila i izračunaj koliko automobila može da se parkira na parkingu.
2. Pored pravog autoputa postavljena su tri stuba u tačkama M, N i P. Udaljenosti između stubova su: $\overline{MP} = 5$ km, $\overline{MN} = 7$ km. Kolika je udaljenost između stubova u tačkama N i P ako:
a) stub P je između stubova M i N b) stub M je između stubova N i P
3. Mirko planira izgraditi ogradu oko svog dvorišta. Dvorište ima oblik pravougaonika sa dužinom od 8 metara i širinom od 5 metara.
a) Grafički odredi ukupnu dužinu ograde dvorišta.
b) Ako je jedan panel ograde koji će se koristiti za ograđivanje dug 6,5 metara, grafički prikaži koliko panela će biti potrebno za izgradnju cijele ograde.
4. Jedan inženjer planira izgraditi most koji će se sastojati od dva dijela:
 - Prvi dio ima dužinu jednaku 4,2 m.
 - Drugi dio ima dužinu jednaku 3,8 m.a) Nacrtaj duži $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, koje predstavljaju dužine dijelova.
b) Konstruiraj novu duž koja predstavlja ukupnu dužinu mosta.
c) Ako inženjer odluči skratiti most za 2 m, konstruiraj novu duž koja predstavlja skraćenu dužinu mosta.
5. Jasna želi izgraditi stazu u svom dvorištu koja će biti prava linija. Staza će imati dužinu od 10 m, ali će biti potrebno s jedne strane odstraniti jedan dio staze kako bi se postavio ulaz u dvorište. Dužina ulaza bit će 4 m. Konstrukcijom odredi kolika će biti nova dužina staze.
6. Lena ima traku koja ima ukupnu dužinu $\overline{AB} = 12$ dm. Ona želi da je koristi za ukrašavanje dvije police u svom domu. Dužina trake koja će biti potrebna za ukrašavanje svake police je $\overline{CD} = 5$ dm.
a) Nacrtaj duž $\overline{AB}$ koja predstavlja ukupnu dužinu trake i duž $\overline{CD}$ za dužinu jedne police.
b) Uz pomoć šestara, konstruiraj novu duž koja će predstavljati preostalu dužinu trake.
c) Izračunaj koliko centimetara trake će ostati nakon ukrašavanja druge police.

Konstrukcija paralelnih i normalnih pravih. Simetrala duži

Ovom lekcijom naučit ćeš kako konstruisati paralelne i normalne prave, kao i konstrukciju simetrale duži. Ovi koncepti su vrlo važni za razumijevanje geometrijskih svojstava pravih i duži i pomoći će ti da rješavaš različite geometrijske zadatke. Sa ovim znanjima moći ćeš raditi različite geometrijske konstrukcije i steći nove vještine koje će ti pomoći pri rješavanju složenijih geometrijskih problema.



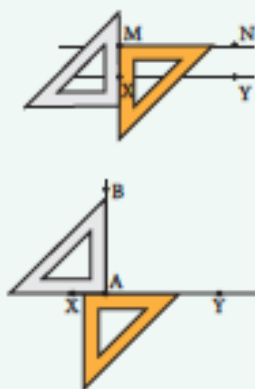
Primjer 1

Marko želi nacrtati ulicu koja je paralelna postojećoj ulici i drugu ulicu koja siječe postojeću ulicu pod pravim uglom. Također, treba postaviti semafor na sredini pješačkog prijelaza.

- Uz pomoć geometrijskog pribora nacrtaj jednu pravu, a zatim nacrtaj drugu pravu koja je paralelna s prvom.
- Nacrtaj drugu pravu koja je normalna (okomita) na prvu.
- Data je duž koja predstavlja pješački prijelaz. Nacrtaj simetralu te duži kako bi označio/označila sredinu gdje će biti postavljen semafor.

Rješenje:

- Koristeći lenjir, nacrtaj jednu pravu.
Da nacrtáš paralelnu pravu, postavi geometrijski trougao pored drugog geometrijskog trougla i klizi ga gore ili dolje dok ne dobiješ paralelnu pravu.
- Za normalnu pravu, koristi geometrijski trougao tako da jedna njegova stranica bude postavljena na prvu pravu, a druga da bude normalna na nju.
- Da nacrtáš simetralu duži, slijedi ove korake:
 - Postavi lenjir na duž i izmjeri dužinu duži.
 - Podijeli tu duž na polovinu i označi središnju tačku dužine.
 - Postavi lenjir tako da jedna njegova stranica bude na duž, a druga da prolazi kroz središnju tačku pod pravim uglom.
 - Nacrtaj normalnu pravu koja siječe duž na polovinu – ovo je njena simetrala.



Primjer 2

Na prozor treba postaviti dvije ukrasne lajsne kao na slici. One treba da budu postavljene tako da jedna prolazi kroz sredinu i da bude postavljena pod pravim uglom na drugu lajsnu. Pomozi majstoru da pravilno postavi lajsne.

Da bismo iskoristili matematiku pri rješavanju ovog realnog problema, koristićemo šestar i predznanja o simetrali duži.



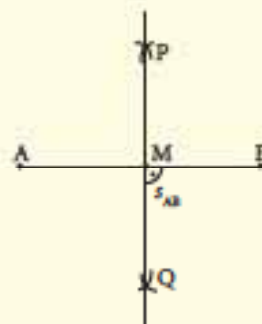
Rješenje:

Koraci za konstrukciju lajsni pomoću šestara:

- Lenjirom nacrtaj horizontalnu lajsnu kao duž s određenom dužinom (na primjer, 4 cm).
- Označi krajnje tačke duži i imenuj ih kao A i B.
- Postavi vrh šestara u tačku A i otvori ga na više od polovine dužine duži.
- Nacrtaj luk iznad i ispod s obje strane duži.
- Ne mijenjajući otvor šestara, ponovi isto iz tačke B, tako da se dva para lukova sijeku. Označi tačke presjeka lukova gore i dolje tačkama P i Q, redom.
- Poveži tačke P i Q gdje se lukovi sijeku lenjirom.
- Ova prava dijeli duž AB na dva jednaka dijela i normalna je na nju. Ona je simetrala AB, oznaka s_{AB} .
- Označi tačku u sredini kao M.

Ova lajsna je normalna na prvu, što znači da formira ugao od 90° s njom.

Sa ovim koracima majstor će moći pravilno postaviti lajsne na prozoru!



Zadatak 1

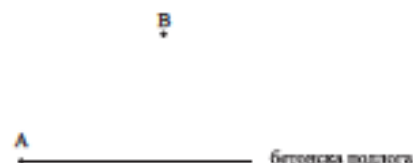
Precrtaj duži u svoju svesku i konstruiraj njihove simetrale.



Primjer 3

Na gradilištu treba postaviti dva stuba normalna na betonsku podlogu koja je već napravljena. Pri tome, za jedan se zna u kojoj tački osnove treba da se postavi, a za drugi na kojoj udaljenosti od ploče treba da stoji.

Kao inženjer na gradilištu, imaš zadatak da napraviš konstrukciju kojom ćeš prikazati oba stuba.



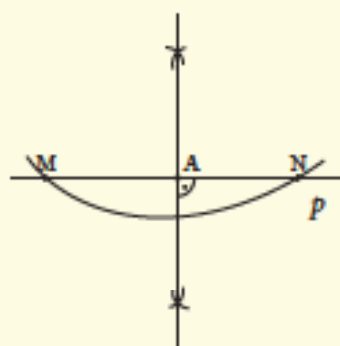
Rješenje:

Koraci za konstrukciju dva stuba:

- I. Konstrukcija stuba u datoj tački betonske podloge (konstrukcija normale na pravu kroz datu tačku koja leži na toj pravoj).

Ovo su koraci konstrukcije:

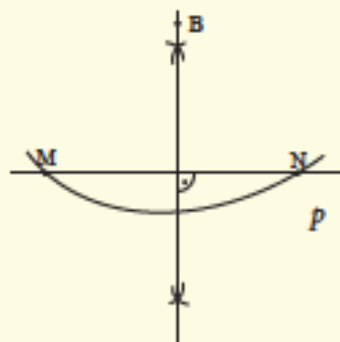
- Lenjirom nacrtaj horizontalnu pravu p , koja predstavlja betonsku podlogu.
- Izaberi tačku A na pravoj p i označi je kao mjesto postavljanja prvog stuba.
- Postavi vrh šestara u tačku A i crtanjem kružnog luka označi dvije tačke M i N na podlozi, jednu lijevo i jednu desno od A .
- Ne mijenjajući otvor šestara, postavi ga u tačku M i nacrtaj luk iznad i ispod.
- Ponovi isto iz tačke N , tako da se dva luka sijeku.



Spoji tačku A s mjestom gdje se sijeku lukovi – ova prava je normalna na podlogu i predstavlja prvi stub.

- II. Konstrukcija drugog stuba koji prolazi kroz tačku izvan betonske podloge:

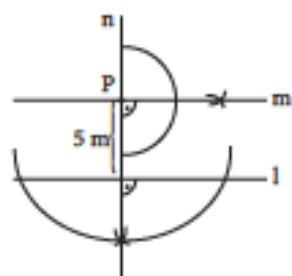
Ovaj slučaj je također konstrukcija normale na pravu kroz tačku koja ne leži na pravoj. Iskoristi ponuđeni crtež prema kojem ćeš zapisati korake u svoju svesku i napraviti traženu konstrukciju.



Primjer 4

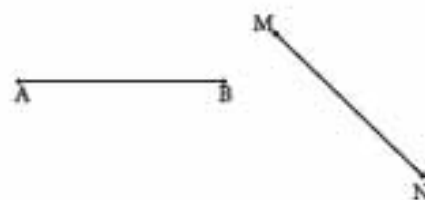
Za bolje hortikulturno uređenje, dvorište treba podijeliti na nekoliko dijelova povlačenjem paralelnih pravih koje su na udaljenosti od 5 metara jedna od druge.

Dakle, data je prava l i tačka P koja je na udaljenosti 5 m od l . Tvoj zadatak je da konstruiraš pravu $m \parallel l$ koja prolazi kroz P . Iskoristi dati crtež, zapiši korake konstrukcije i uradi je u svojoj svesci.



Zadatak 2

Precrtaj duži u svoju svesku. Kroz tačku S koja je tačka presjeka simetrala duži AB i MN konstruiraj pravu p koja je normalna na pravu AM i pravu q koja je paralelna s pravom BN .



Primjer 5:

Na jednoj ulici treba postaviti novo autobusko stajalište. Platforma stajališta treba biti normalna na rub trotoara, a krovna konstrukcija treba biti paralelna s njim. Kao inženjer, imaš zadatak da napraviš tačnu konstrukciju za pravilno postavljanje platforme i krova.

- Konstruiraj platformu kao duž normalnu na rub trotoara.
- Konstruiraj pravu koja će biti paralelna s rubom trotoara i predstavljati krovnu konstrukciju.

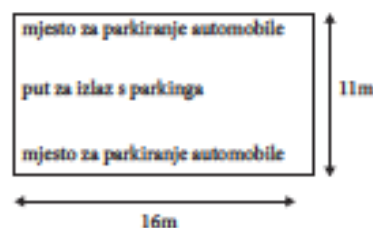
Rješenje:

Koraci za konstrukciju:

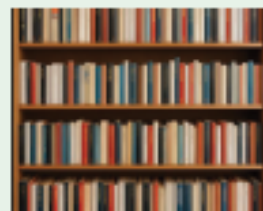
- Nacrtaj pravu p , koja predstavlja rub trotoara.
- Izaberi tačku A na toj pravoj gdje će biti postavljena platforma.
- Šestarom:
 - Označi dvije tačke B i C na pravoj p , na jednakoj udaljenosti od A .
 - Postavi vrh šestara u tačku B i s radijusom većim od polovine duž BC opiši luk prema gore.
 - Zatim postavi šestar u tačku C s istim radijusom i opiši drugi luk koji se siječe s prvim.
 - Označi tačku presjeka kao D i poveži je s A . Dobijena duž AD je normalna na p i predstavlja platformu.
- Za krovnu konstrukciju:
 - Izaberi tačku E kroz koju će biti postavljen krov.
 - Koristeći šestar, konstruiraj pravu q paralelnu s p koja prolazi kroz E .
 - Ova prava q predstavlja krovnu konstrukciju.

Zadatak 3

Na crtežu je prikazan parking prostor na kojem treba iscrtati paralelne linije kojima će se označiti parking mjesta za automobile. Ona trebaju biti poredana u dva reda i ostaviti prostor između redova za izlaz s parkinga. Iscrtaj linije na parking prostoru i odredi koliko najviše automobila može stati na ovaj parking ako prostor za jedan automobil treba imati oblik pravougaonika dimenzija 4 m na 2 m. (Dimenzije parkinga su 16 sa 11 metara, a izlaz je tri metra na strani parkinga dužine 11 metara).



Kako bi mogao koristiti paralelne i normalne prave, kao i simetralu duži u svakodnevnim situacijama, na primjer, u arhitekturi, dizajnu namještaja ili čak u slikarstvu? Objasni kako ti ove konstrukcije mogu pomoći da stвориш precizne i uredne konstrukcije.

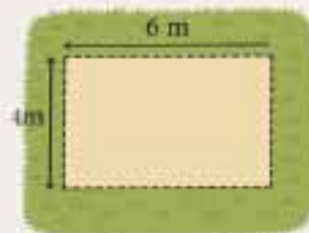


Odgovori u svoju svesku. Ako za nešto nisi siguran, vrati se na te dijelove lekcije.

1. Koliko dobro razumijem osnovne geometrijske pojmove, kao što su paralelne i normalne prave, i simetrala duži te njihova konstrukcija?
2. Da li uspijevam koristiti ove konstrukcije u zadacima vezanim za dizajn, arhitekturu ili svakodnevne situacije?
3. Koja konstrukcija mi je bila najteža za razumjeti i zašto?
4. Koja konstrukcija mi je bila najlakša i kako sam je primjenjivao/primjenjivala?
5. Da li se osjećam spremno primijeniti ove geometrijske koncepte u novim zadacima ili izazovima?

Samostalni rad

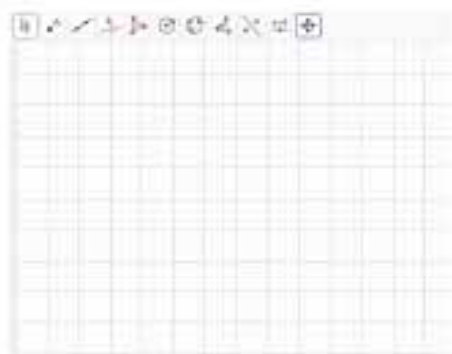
1. Paralelno s datom ulicom s iste strane treba postaviti dvije paralelne pješačke staze. (koristi razmjer)
 - a) Konstruiraj dvije paralelne staze koristeći šestar, tako da prva staza bude na udaljenosti od 3 metra od ulice, a druga na udaljenosti od 6 metara od prve staze.
 - b) Odredi udaljenost između ulice i druge staze.
2. U projektu za uređenje dvorišne površine imaš zadatak postaviti cvjetnu gredicu koja će biti normalna na pješačku stazu u dvorištu.
 - a) Izaberi tačku na glavnoj stazi od koje ćeš započeti gradnju cvjetne gredice.
 - b) Konstruiraj normalnu pravu iz te tačke koja će sjeći glavnu stazu i po toj pravoj će biti cvjetna gredica.
3. Date su dvije tačke na udaljenosti od 8 cm jedna od druge. Nađi središnju tačku iz među ove dvije tačke konstrukcijom simetrale.
4. U projektu za izgradnju staze treba da konstruiraš dvije paralelne prave koje će predstavljati donju i gornju stranu staze. Širina staze je 2 m. Zatim treba da konstruiraš normalnu stazu kod koje je udaljenost između lijeve i desne strane staze 2,5 m.
5. Park ima oblik pravougaonika dimenzija 6 m i 4 m.
U projektu za planiranje staza u parku treba postaviti dvije staze. Prva staza treba biti postavljena paralelno s dužinom parka na udaljenosti od 1 m i s dužinom 8 m. Druga staza treba biti normalna na prvu i da je dijeli na dva jednaka dijela.



Konstrukcija geometrijskih elemenata obrazovnim softverom

U ovoj lekciji ćeš se upoznati s važnim aspektom geometrije — konstrukcijom geometrijskih elemenata, ali uz pomoć savremenog obrazovnog softvera. Korištenje digitalnih alata za crtanje i konstruiranje u geometrijskim zadacima značajno olakšava proces učenja, dajući nam mogućnost da vizualiziramo i ispitamo geometrijske konstrukcije na jednostavniji i interaktivniji način.

Cilj ove lekcije nije samo da razviješ tehničke vještine za rad sa softverom, nego i da unaprijediš svoje razumijevanje osnovnih geometrijskih koncepata. Uz pomoć interaktivnih alata postat ćeš sigurniji i efikasniji u rješavanju geometrijskih problema. Na kraju lekcije bit ćeš spreman/spremna koristiti softver za tačno i brzo izvođenje geometrijskih konstrukcija, što će ti koristiti u daljnjem učenju geometrije, kao i u svakodnevnim zadacima koji uključuju planiranje, dizajn i analizu.



Primjer 1

U jednoj tvornici igračaka prave se različite komponente za igračke. Tvoj zadatak je da nacrtáš dio igračke koji treba imati pravougaoni oblik sa stranicama 6 cm i 4 cm.

Rješenje:

Da bi napravio ovu konstrukciju, trebat ćeš koristiti više geometrijskih konstrukcija.

1. Konstrukcija duži jednake datoj duži: Započni zadavanjem jedne duži na stolu dužine 6 cm. Tvoj zadatak je da nacrtáš duž čija je dužina jednaka datoj duži (AB).
2. Konstrukcija normalnih pravih: Kroz krajnje tačke dužine konstruiraj dvije normalne prave.
3. Označi dvije tačke na svakoj od dobijenih normala, po jednu na udaljenosti 4 cm od krajnjih tačaka prve duži (C, D).
4. Poveži četiri tačke da formiraš pravougaonik. Razmisli i zapiši korake konstrukcije ako prvo koristiš svojstvo paralelnih stranica pravougaonika.

Primjer 2

Koristi alate obrazovnog softvera, na primjer, GeoGebru, da konstruiráš duž jednaku datoj duži, simetralu duži i paralelne i normalne prave.

Rješenje:

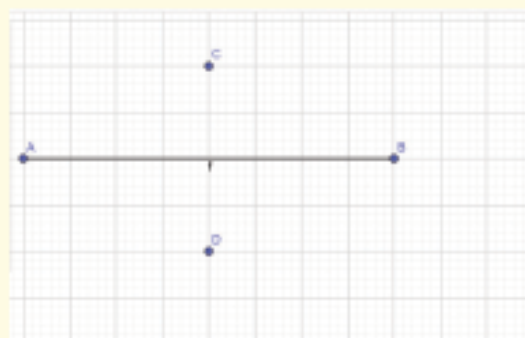
- Konstrukcija duži jednake datoj duži:
Izaberi jednu duž i koristi alatku za kopiranje da konstruiráš drugu jednaku dužinu.
- Konstrukcija simetrale:
Izaberi odgovarajuću alatku iz menija i kreiraj simetralu duži.
- Konstrukcija paralelnih i normalnih pravih:
Odgovarajuće alatke ti omogućavaju da kreiráš prave koje su paralelne ili normalne na datu pravu.

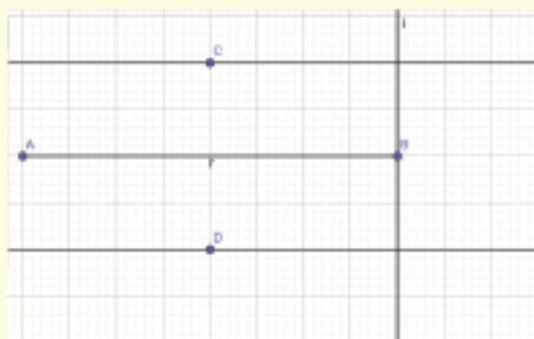
Primjer 3

Koristi obrazovni softver za crtanje pješačkog prijelaza na ulici.

1. Nacrtaj pravu koja predstavlja ulicu: započni crtanjem jedne duži koja će predstavljati središnju liniju ulice.
2. Koristi paralelne linije za označavanje rubova prijelaza: nacrtaj dvije paralelne linije s obje strane duži koja predstavlja ulicu. Ove linije će označavati rubove pješačkog prijelaza.
3. Koristi normalne linije za označavanje „zebrí“ prijelaza: nacrtaj normalne prave na paralelne prave koje će predstavljati linije „zebrí“ na pješačkom prijelazu.

Rješenje:





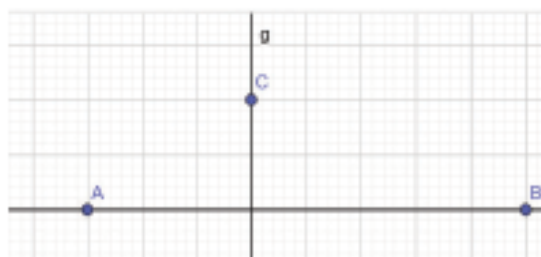
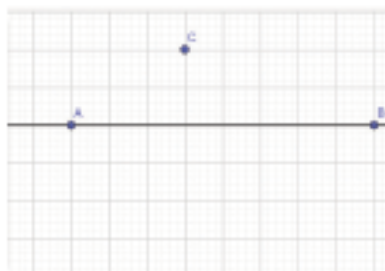
Primjer 4

Radiš na planu za izgradnju mosta. Tvoj most treba imati zaštitnu ogradu.

- Nacrtaj duž koja predstavlja most.
- Koristi simetralu da podijeliš most na dva jednaka dijela.
- Dodaj paralelne linije za označavanje strana mosta.
- Nacrtaj prave normalne na most koje će predstavljati stubove koji drže most.

Koristi obrazovni softver za ovaj zadatak.

Na slikama je prikazan postupak crtanja normalne prave na AB u tački C koja ne leži na pravoj AB.





Nacrtaj plan za novi javni prostor (park, most ili ulicu). Koristi obrazovni softver za:

- Konstruktiju duži koje će predstavljati glavnu strukturu.
- Koristi simetrale, paralelne i normalne prave da dizajniraš detalje.

Pokušaj i s drugim alatima obrazovnog softvera kako bi predstavio prostor.

Zatim, odgovori na sljedeća pitanja:

- Koji su koraci bili najlakši, a koji najteži za konstrukciju?
- Kako ti je obrazovni softver pomogao da budeš precizniji?
- Što bi uradio drugačije sljedeći put?

Ocijeni sebe pomoću ove skale:

- Jasno razumijem koncept duži i simetrale.
- Znam konstruirati paralelne i normalne prave pomoću softvera.
- Mogu samostalno primijeniti geometrijske konstrukcije u stvarnim situacijama.

Samostalni rad

Ako imaš mogućnost, rješavaj zadatke koristeći geometrijski softver, u suprotnom rješavaj u svojoj svesci.

1. U parku postoji staza duga 6 m. Treba napraviti drugu stazu koja prolazi kroz sredinu prve i normalna je na nju.
2. Data je prava i točka koja ne leži na njoj. Kroz datu točku konstruiraj pravu paralelnu s datom.
3. a) Nacrtaj pravougaonik koji predstavlja osnovu teniskog igrališta u dvorištu.
b) Nacrtaj dvije dijagonale pravougaonika i označi ih.
c) Konstruiraj simetralu jedne dijagonale. Kuda prolazi simetrala? Šta možeš reći o dijagonalama pravougaonika?
4. Dvije pješačke staze treba da se ukrste pod pravim uglom u datoj tački jedne od staza. Prikaži konstrukciju za ovu situaciju u svojoj svesci.
5. Prozor ima oblik kvadrata. Povuci jednu dijagonalu kvadrata. Kroz središnju točku dijagonale konstruiraj pravu normalnu na dijagonalu.
a) Kroz koje tačke prolazi prava normalna na dijagonalu?
b) Šta možeš reći o pravoj normalnoj na dijagonalu?

6. Bašta u obliku pravougaonika treba da se podijeli na dva jednaka dijela. Koju geometrijsku konstrukciju ćeš koristiti? Na koliko načina se može podijeliti?
7. Dva mosta treba da budu paralelna i da prolaze kroz dvije date tačke. Konstruiraj paralelne prave koje prolaze kroz date tačke.
8. U parku pravougaonog oblika (9 m i 6 m) treba postaviti staze tako da jedne budu raspoređene paralelno s dužinom pravougaonika na svakih 3 m, a druge normalno na širinu pravougaonika na svakih 2 m. Konstruiraj staze. Objasni koje su međusobno paralelne, a koje međusobno normalne staze. Zašto?

Osnovni pojmovi o uglovima i poluravninama

U svakodnevnom životu često se susrećemo s oblicima, linijama i uglovima – od dizajna prozora i vrata u našim domovima do krivudavih staza u parkovima. Da bismo razumjeli i koristili ove pojave, važno je da poznamo osnovne geometrijske pojmove, kao što su poluravnine i uglovi.



U ovoj lekciji naučit ćeš pojmove poluravnina, konveksni i nekonveksni uglovi i kako da ih primjenjuješ u svakodnevnim situacijama, pri dizajniranju prostora i rješavanju problema.

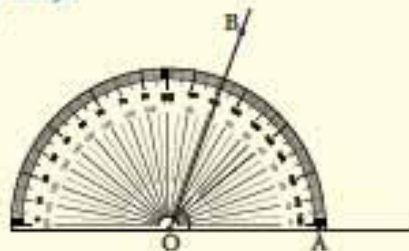
Primjer 1

Ana postavlja solarni panel u svom dvorištu. Da bi dobila najbolji ugao za primanje sunčeve svjetlosti, panel treba da bude postavljen pod uglom od tačno 67° . Ona je nacrtala ugao na papiru, ali ne zna kako da označi njegove elemente da bi ga izmjerila i provjerila da li je tačan. Da bi pomogao/pomogla Ani:

- a) Nacrtaj ugao uglomjerom od 67° .
- b) Imenuj elemente ugla (teme i kraci).

Rješenje:

a)



- b) Temena ugla je O. Na svakom kraku izaberi po jednu tačku i imenuj ih, na jednom kraku npr. A, a na drugom kraku B (kraci ugla su OA i OB).

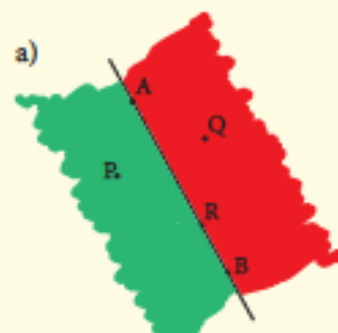
Primjer 2

U parku se gradi put koji treba da podijeli park na dva dijela – dio s cvjetnim lejama i dio s travnjakom. Inženjeri su počeli da označavaju put pravom linijom AB.

- Označi različitim bojama dijelove s obje strane prave AB.
- Odredi i zapiši koje tačke ravni parka pripadaju jednoj, a koje drugoj strani prave.
- Riječima opiši šta predstavlja pojam „poluravnina“.

Rješenje:

- Tačka P je na zelenom dijelu ravni, odnosno na lijevoj strani prave AB. Tačka Q je na dijelu ravni obojenom crveno, odnosno na desnoj strani prave AB. I tačka R je na pravoj AB.
- Poluravnina je dio ravni koji je ograničen jednom pravom i sadrži sve tačke s jedne strane te prave, zajedno sa samom pravom.



Sve tačke iz jedne ravni koje se nalaze na istoj strani od date prave u ravni, zajedno s tom pravom, obrazuju geometrijski oblik koji se naziva poluravnina. Za pravu m kažemo da je granična prava ili rub te ravnine.

Zadatak 1

Zamisli da je staklo na prozoru ili površina vrata ravan. Ako postaviš liniju koja dijeli staklo ili vrata na dva dijela, koji dijelovi su poluravnine?

Primjer 3

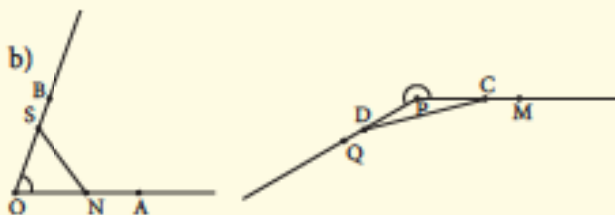
Na crtežu su data dva ugla.

- Koji ugao je manji, a koji veći od 180° ?
- Precrtaj uglove u svoju svesku i označi svaki ugao.
- Izaberi tačke na kracima svakog ugla i poveži ih.
- Šta možeš reći o dužini koju si dobio u svakom uglu čiji su krajnji punktovi tačke s krakova tog ugla?



Rješenje:

- $\angle AOB = 70^\circ$ manji od 180° .
 $\angle MPQ = 210^\circ$ veći od 180° .
- Dužina NS je takva da njeni krajnji punktovi pripadaju kracima i ona leži potpuno unutar $\angle AOB$.
 Dužina CD je takva da njeni krajnji punktovi pripadaju kracima ugla, ali ona ne leži unutar $\angle MPQ$.
 Zaključujemo da se uglovi $\angle AOB$ i $\angle MPQ$ razlikuju.



Za jedan ugao kažemo da je konveksan ako svaka dužina čiji su krajnji punktovi tačke s krakova tog ugla potpuno leži unutar tog ugla.

Pojam konveksnog ugla je poseban slučaj općeg pojma konveksnog oblika.

Jedan ravninski geometrijski oblik F (podskup tačaka iz ravni) naziva se konveksan oblik ako za svake dvije tačke M i N iz F , duž MN potpuno leži na obliku F , odnosno duž MN je podskup oblika F .

Zadatak 2

Objasni zašto su prave, poluprave, duži, ravan i poluravnina konveksni oblici?

Zadatak 3

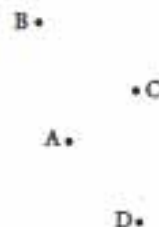
Kakav ugao formiraju kazaljke na satu ako:

- pokazuju 3:00 sata?
- pokazuju 10:10 sati?

Primjer 4

Četvorica igrača košarkaškog tima postavljeni su na terenu kao na crtežu. Pomozite treneru da odredi:

- Da li je igrač u tački D u istoj poluravnini s igračem C u odnosu na pravu koja se formira od pozicija igrača A i B?
- Da li se ovim rasporedom igrača A, B i C formira konveksan ili nekonveksan ugao s vrhom u B?



Rješenje:

Napravi crtež u svojoj svesci prema datim uputama.

- Ako povučesh pravu AB, očigledno je da se tačke C i D nalaze na istoj strani od nje, odnosno leže u istoj poluravnini.
- Ako nacrtash poluprave BA i BC, dobijaju se dva ugla s vrhom u tački B, takva da je jedan konveksan (to je ugao čija je unutrašnja tačka tačka D), a drugi nekonveksan (za njega je tačka D spoljašnja tačka). Imenuj svaki od uglova.

Zadatak 4

Tri klupe u školskom dvorištu postavljene su u vrhovima zamišljenog trougla ABC.

- Da li je klupa u tački C u istoj poluravnini s klupom A u odnosu na pravu koja se formira od pozicija klupa A i B?
- Da li se ovim rasporedom klupa A, B i C formira konveksan ili nekonveksan ugao?

Zadatak 5

Bašta je podijeljena stazom koja ide od tačke P(2,1) do tačke Q(6,5). Cvjetna gredica je postavljena u tački R(4,3). Odgovori na sljedeća pitanja:

- Da li tačka R pripada gornjoj ili donjoj poluravnini određenoj pravom PQ?
- Da li je ugao $\angle PRQ$ konveksan ili nekonveksan?

Zadatak 6

Napravi vlastiti dizajn bašte. Postavi staze po svom izboru koje se sijeku pod različitim uglovima. Crtaj na papiru ili koristi obrazovni softver da označiš uglove između staza. Klasificiraj dobijene uglove kao konveksne ili nekonveksne.

Ocijeni svoj odgovor prema sljedećim kriterijima:

- Identificirani su svi uglovi.
- Tačno su klasificirani kao konveksni ili nekonveksni.
- Objašnjeno je zašto svaki ugao pripada odgovarajućoj kategoriji.

Zašto je važno razlikovati konveksne od nekonveksnih uglova u stvarnom životu? Koji primjeri iz svakodnevice su ti najviše pomogli da razumiješ poluravnine i uglove?

U svoju svesku odgovori sa DA ili NE na sljedeće tvrdnje:

1. Mogu prepoznati i imenovati uglove i poluravnine.
2. Razlikujem oštar, prav, tup i ravan ugao.
3. Mogu klasificirati uglove kao konveksne ili nekonveksne.
4. Mogu pravilno nacrtati i označiti uglove i poluravnine.
5. Uspješno rješavam zadatke povezane s uglovima i poluravninama.

Ako imaš više odgovora „NE“, ponovi dijelove koji su ti nejasni.

Samostalni rad

1. Grad je podijeljen na dva dijela rijekom koja prolazi kroz njega. Rijeka predstavlja pravu AB, gdje su A(2,2) i B(6,2). Park se nalazi u tački C(4,4), a škola se nalazi u tački D(4,1).
 - a) Da li su park i škola u istoj poluravnini koja je određena pravom AB?
 - b) Koje od tačaka su na istoj strani rijeke: E(5,5), F(1,1) i G(3,7)?
2. U jednom parku postoje tri staze koje se sijeku u tačkama A(3,2), B(6,4) i C(5,6). Tri staze formiraju trougao ABC.
 - a) Nacrtaj tri staze i označi ugao $\angle ABC$.
 - b) Da li je ugao $\angle ABC$ konveksan ili nekonveksan? Objasni zašto!
3. Dvorište jedne kuće podijeljeno je stazom koja u koordinatnom sistemu prolazi kroz tačke A(1,5) i B(4,3). U dvorištu se nalaze: fontana u tački F(3,5), cvjetnjak u tački G(2,1) i roštilj u tački H(4,7).
 - a) Nacrtaj pravu AB i označi tačke F, G i H.
 - b) Koje od tačaka F, G i H su na istoj strani od staze?
 - c) Koja od tačaka je najudaljenija od staze?
4. Na sportskom terenu postavljen je fudbalski gol s tačkama A(1,3) i B(5,3). Igrač se nalazi u tački C(4,6), a lopta je u tački D(2,5).
 - a) Nacrtaj pravu AB koja predstavlja gol i tačke C i D.
 - b) Da li je ugao ACD s vanjskom tačkom B konveksan ili nekonveksan?
 - c) Koja od tačaka C(4,6) ili D(2,5) je bliže pravoj AB?

5. Nacrtaj stazu za trčanje koja dijeli park na dvije poluravnine. Staza počinje od tačke A(1,3) i ide do tačke B(5,3). U parku je postavljena umjetnička skulptura u tački C(3,6). Odgovori na sljedeća pitanja:

- Kojoj poluravnini definisanoj pravom AB pripada tačka C?
- Da li je ugao $\angle ACB$ konveksan ili nekonveksan?

Mjerenje, procjenjivanje i crtanje uglova

U svakodnevnom životu često se susrećemo sa situacijama u kojima trebamo procijeniti veličinu ugla. Na primjer, arhitekti u svom radu moraju tačno odrediti da li je ugao krova oštar, tup ili nekonveksan kako bi se osigurala stabilnost i funkcionalnost.

U ovoj lekciji ćeš naučiti:

- Kako razlikovati i izmjeriti oštre, tupe i nekonveksne uglove do najbližeg stepena.
- Kako procijeniti veličine uglova do najbliže desetice.
- Kako ta znanja primijeniti u realnim situacijama.

Primjer 1

U parku se planira izgradnja staza koje formiraju uglove oko fontane. One su postavljene na sljedeći način:

- Staza AB i BC sijeku se u tački B i formiraju $\angle ABC$ od 50° .
- Staza BC i CD sijeku se u tački C i formiraju $\angle BCD$ od 90° .
- Staza CD i DA sijeku se u tački D i formiraju $\angle CDA$ od 120° .
- Staza DA i AB sijeku se u tački A i formiraju $\angle DAB$ od 100° .

a) Odredi koji uglovi su oštri, pravi, tupi ili nekonveksni.

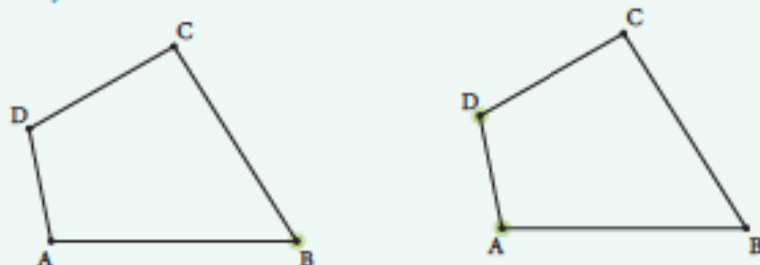
c) Nacrtaj plan staza i označi uglove.

d) Zamisl i da u parku treba postaviti rasvjetu u svakom uglu:

- Ako treba postaviti rasvjetu samo u temenima oštrog uglova, u kojim tačkama ćeš je postaviti?
- Ako treba postaviti rasvjetu kod svih uglova većih od 90° , u kojim tačkama ćeš je postaviti?

Rješenje:

d)



Primjer 2

Nacrt-plan za dnevni boravak jednog stana predviđa precizno projektiranje, odnosno treba izmjeriti i nacrtati svaki ugao između zidova do najbližeg stepena. Arhitekta je odredio sljedeće uglove:

- Ugao između sjevernog i istočnog zida iznosi 65° .
- Ugao između južnog zida i plafona je 120° .
- Ugao između zapadnog i južnog zida je 210° .

- Nacrtaj ove uglove u svojoj svesci koristeći uglomjer.
- Odredi koji od njih je oštar, prav, tup i nekonveksan ugao.
- Dodatno objasni kako ugao od 90 stepeni koristiti za provjeru uglova od 65° i 120° .

Rješenje:

a) Crtanje uglova:



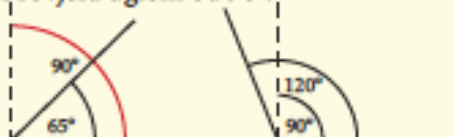
Za 210° korišteno je mjerenje dopunskog ugla
 $(360^\circ - 210^\circ = 150^\circ)$



ili kao druga opcija
 $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$.

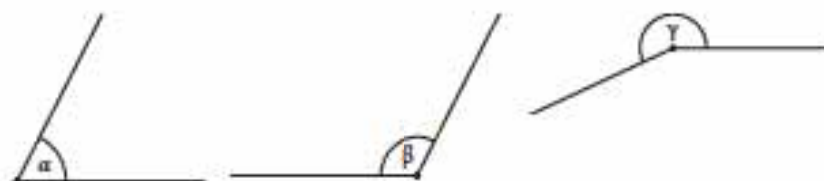
b) Klasifikacija uglova:

- 65° je oštar ugao (manji od 90°)
- 120° je tup ugao (između 90° i 180°)
- 210° je nekonveksan ugao (veći od 180°)

c) Provjera uglom od 90° :

Primjer 3

Arhitekta Marko dizajnira novu sobu i nacrtao je nekoliko uglova između zidova. Potrebno je procijeniti veličinu ovih uglova do najbližeg stepena izraženog cijelim deseticama kako bi se izradio tačan plan.



a) Precrtaj tabelu u svesku.

Ugao	Procijenjena veličina ugla	Veličina ugla mjerenjem uglomjerom
α		
β		
γ		

Procijeni veličinu svakog ugla do najbližeg stepena izraženog cijelim deseticama. Unesi procijenjenu veličinu svakog ugla.

- b) Koji od uglova je oštar, tup ili nekonveksan?
c) Napravi crteže u kojima ćeš prikazati uglove s procijenjenim vrijednostima.

Procjenjivanje uglova

Da bi procijenio/la ugao bez uglomjera, koristi vizuelno poređenje, na primjer:

- a) Ugao od 45° je polovina pravog ugla (90°).
b) Ugao od 135° je tupi ugao, približno na polovini između 90° i 180° .
c) Nekonveksni ugao, kao 240° , izgleda gotovo kao pun krug s malim ostatkom.

Rješenje:

a) Procjena uglova:

Za 63° : blizu 60°

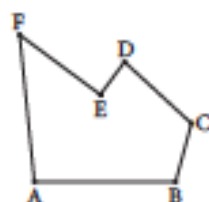
Za 117° : blizu 120° .

Za 205° : blizu 210° .

b) Prvi ugao od 60° je oštar ugao (manji od 90°), drugi ugao je tup (između 90° i 180°), dok je treći ugao 210° nekonveksan ugao (veći od 180°).

Zadatak 1

Koristi uglomjer i na crtežu izmjeri jedan oštar, jedan tup i jedan nekonveksan ugao, a zatim nacrtaj te uglove u svoju svesku.



Zadatak 2

Procijeni veličinu svakog ugla do najbližeg stepena u cijelim deseticama. Za svaki ugao, zapiši svoju procjenu i uporedi je s stvarnom veličinom ugla.



Zadatak 3

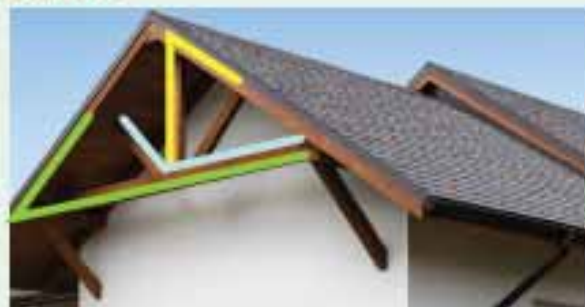
Sa slike procijeni uglove. Jesu li približno 30° , 90° ili 150° ?



Primjer 4

Nacrtaj jednostavnu skicu dijela objekta (kuća, krov, zgrada...) s različitim uglovima. Označi uglove koji su 60° , 120° i 180° .

Rješenje:



Zadatak 4

Nacrtaj ornament koji će sadržavati konveksne i nekonveksne uglove, a zatim oboj oštre uglove crvenom bojom, tupe plavom, a nekonveksne uglove zelenom bojom. Na kraju izmjeri po jedan ugao svake vrste i zapiši njegovu veličinu.



Zadatak 5

Napravi spisak s pet predmeta u tvom domu (na primjer, ramovi, posude, stolovi, prozori). Za svaki predmet:

- Procijeni jedan ugao.
- Izmjeri ugao uglomjerom.
- Zabilježi kolika je razlika između procjene i mjerenja.

Kako bi objasnio prijatelju šta je nekonveksan ugao? Kreiraj skicu, na primjer, most ili park, gdje ćeš koristiti najmanje tri vrste uglova (oštre, tupe i nekonveksne). Objasni zašto si izabrao te uglove. Napravi procjenu, a zatim provjeri tačnost svojih procjena iz prethodnog pitanja. Koliko si blizu stvarnim mjerenjima?

Da bi procijenio svoje znanje, pokušaj odgovoriti u svojoj svesci na sljedeće izazove:

Pitanje 1: Nacrtaj nekoliko uglova i procijeni ih bez korištenja uglomjera. Zatim ih izmjeri i uporedi svoju procjenu s tačnim vrijednostima. Koliko je bila blizu?

Pitanje 2: Zamisli da treba da izradiš sto s trougaonom pločom. Koje uglove ćeš izabrati da bude stabilan? Nacrtaj skicu s označenim uglovima.

Pitanje 3: Ako je jedan ugao 130° :

- Koliko mu nedostaje do 180° ?
- Koliko mu nedostaje do 360° ?

Pitanje 4: U kojim svakodnevnim situacijama bi mogao/mogla koristiti znanje o mjerenju uglova? Navedi barem tri primjera.

Ako tačno odgovoriš na sva pitanja 🚀

Ako odgovoriš na 3–4 pitanja, nastavi da vježbaš! 💡

Ako odgovoriš na 1–2 pitanja, vrati se na lekciju i vježbaj još malo! ✖

Izazov: Pokušaj da kreiraš svoju zagonetku ili zadatak povezan s mjerenjem uglova i podijeli je s drugima!

Samostalni rad

1. Nacrtaj ugao koji je veći od 90° i manji od 180° bez uglomjera. Procijeni njegovu veličinu, zapiši je. Zatim izmjeri ugao uglomjerom do najbližeg stepena i napiši njegovu veličinu. Kolika je razlika između veličine ugla i procjene?

2.



Precrtaj tabelu u svoju svesku i popuni je.

Ugao	Procjena	Mjerenje	Razlika između procjene i mjerenja
Ugao 1			
Ugao 2			
Ugao 3			

3. Nacrtaj ugao od 50° i ugao od 130° bez uglomjera. Svaki ugao izmjeri. Koliku grešku si napravio pri crtanju bez uglomjera?

Centralni ugao

Jesi li primijetio/la da brzinomjer na tvom biciklu, sat na zidu ili dizajn točka imaju oblike koji uključuju krugove i uglove? U ovoj lekciji naučit ćeš kako crtati, označavati i koristiti centralne uglove za rješavanje različitih problema.

Primjer 1

Jana želi napraviti ukras za rodendansku zabavu. Ona će koristiti kružni luk da napravi zanimljiv ukras na plafonu svoje sobe.

Dizajn ukrasa:

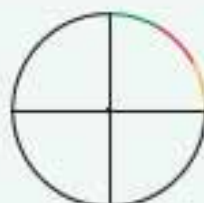
- Jana ima tri trake: crvenu, zelenu i žutu.
- Ona želi da svaka traka pokriva jedan dio kružnog luka koji je $\frac{1}{4}$ od cijele kružnice.
- Dijelovi kružnog luka pokriveni različitim trakama da budu jednaki.



- a) Koliki dio luka će biti pokriven svakom od traka?
- b) Hoće li postojati neki dio luka koji će biti bez trake?
Ako je odgovor da, koliki je taj dio?

Rješenje:

- a) Luk je $\frac{1}{3}$ od cijelog kruga. Jana ima tri trake (crvenu, zelenu i žutu) i svaka od njih će pokrivati jednaku dužinu kružnog luka. Budući da imamo tri trake, svaka traka će pokriti $\frac{1}{3}$ od luka.
- b) Ako svaka traka pokriva $\frac{1}{3}$ od kružnog luka (posmatraš ga kao cjelinu), a ima tri trake, tada će ove tri trake zajedno pokriti $\frac{3}{3}$, odnosno cijeli kružni luk. Znači, cijeli kružni luk će biti pokriven trakama i neće ostati prazan dio.



Primjer 2

Marko i Ana rade zajedno na jednom projektu. Oni žele napraviti zanimljiv crtež na jednom zidu u svojoj školi koristeći kružnicu i nekoliko pravih koje će se sjeći u njenom centru. Pri tome kružnicu dijele na tri jednaka dijela i svaki dio boje različitim bojom. Marko i Ana radili su prema sljedećim koracima:

- Marko je nacrtao kružnicu s centrom u tački O.
 - Ana je povezala tačku O s tačkom A na kružnici.
 - Marko je postavio uglomjer u centar O kružnice i na polupravu koju je nacrtala Ana te izmjerio ugao od 120° . Zašto? Zatim je povukao drugi krak ugla i presjek s kružnicom označio sa B. Između tačaka A i B na kružnici označio je tačku M.
 - Ana je, počevši od kraka OB ugla AOB, uglomjerom izmjerila ugao od 120° i povukla drugi krak drugog ugla. Presjek drugog kraka drugog ugla s kružnicom označila je sa C. Između B i C izabrala je tačku N.
 - I između tačaka C i A na kružnici Marko je izabrao tačku P.
- a) Prema koracima koje su slijedili Marko i Ana, crtaj u svoju svesku.
- b) Da li je kružnica podijeljena na tri dijela?
- c) Imenuj dobijene lukove!
- d) Zapiši svaki ugao čije je teme u centru kružnice i koji odgovara jednom od kružnih lukova $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$, $\widehat{CPA}$.
- e) Precrtaj tabelu u svesku i popuni je.

Kružni luk	Centralni ugao	Tetiva

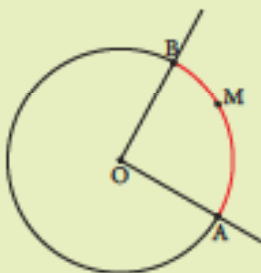
Rješenje:

- a) Crtež koji su dobili Marko i Ana dat je na crtežu.
 b) Kružnica je podijeljena na tri jednaka dijela. Objasni zašto.
 c) Dobijeni su lukovi $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$, $\widehat{CPA}$.
 d) $\angle AOB$ s vrhom u centru kružnice i njegovi kraci odsijecaju luk $\widehat{AMB}$,
 $\angle BOC$ s vrhom u centru kružnice i njegovi kraci odsijecaju luk $\widehat{BNC}$,
 $\angle AOC$ s vrhom u centru kružnice i njegovi kraci odsijecaju luk $\widehat{CPA}$.



Ugao čije je teme centar O kružnice i čiji su kraci poluprečnici kružnice naziva se centralni ugao.

Svaki luk jedne kružnice određuje jedinstven centralni ugao nad tim lukom.



- e) Prema primjerima, dopuni tabelu u svojoj svesci.

Kružni luk	Centralni ugao	Tetiva
	$\angle AOB$	AB
	$\angle BOC$	
	$\angle AOC$	

Svaki centralni ugao u jednoj kružnici određuje jedinstvenu tetivu te kružnice.

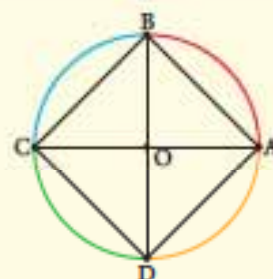
Primjer 3

Grupa učenika željela je urediti školsko dvorište cvjetnjakom podijeljenim na 4 jednaka dijela. Da bi im pomogao, slijedi sljedeće korake:

- Nacrtaj kružnicu i podijeli je na četvrtine. Šta primjećuješ o dijelovima? Kakav je centralni ugao formiran nad svakim od četiri luka?
- Poveži susjedne tačke kružnice tetivama. Koliko tetiva možeš nacrtati? Da li se na svakoj tetivi formira ugao u centru? Kakav je taj ugao?
- Izaberi jednu tetivu i posmatraj kružnicu. Na koliko dijelova tetiva dijeli kružnicu? Da li svaka tetiva određuje jedan centralni ugao? Opiši te uglove. Da li tetiva odgovara svakom od dva kružna luka? Kako možeš potvrditi tu vezu?
- Možeš li zaključiti šta određuje svaki centralni ugao u kružnici? Kako je tetiva povezana s centralnim uglovima koje određuje? Kako možeš dokazati da svaki centralni ugao određuje jedinstven kružni luk?

Rješenje:

- Svaki dio kružnice je jednak jer je kružnica podijeljena na četiri jednaka luka. Svaki centralni ugao nad jednim lukom iznosi 90° jer je puni ugao kružnice (360°) podijeljen na četiri jednaka dijela.
- Možeš nacrtati četiri tetive koje povezuju susjedne tačke kružnice. Svaka tetiva formira centralni ugao u centru kružnice. Ugao zavisi od dužine luka koji obuhvata ta tetiva.
- Jedna tetiva dijeli kružnicu na dva luka – jedan veći i jedan manji. Da, svaka tetiva određuje dva centralna ugla. Jedan centralni ugao je nad većim lukom, a drugi je nad manjim lukom. Tetiva leži u jednom od ta dva ugla. Ovo se može potvrditi tako što će se izmjeriti ugao koji odgovara manjem kružnom luku nad tom tetivom, odnosno konveksni ugao. Preostali dio kružnice, odnosno veći kružni luk, odgovara nekonveksnom uglu koji iznosi 360° - konveksni ugao.
- Svaki luk jedne kružnice određuje jedinstven centralni ugao nad tim lukom.



Tetiva povezuje krajnje tačke luka, a centralni uglovi se formiraju na osnovu tih krajnjih tačaka i centra kružnice.

Svaki centralni ugao jedne kružnice određuje jedinstvenu tetivu te kružnice.

Zadatak 1

Tačkama M i N kružnica je podijeljena na dva kružna luka, od kojih je jedan 7 puta duži od drugog. Odredi centralni ugao koji odgovara kraćem kružnom luku.

Zadatak 2

Jedna kružnica tačkama P i Q podijeljena je na dva dijela, od kojih je jedan $\frac{4}{9}$ od kružnice. Odredi centralni ugao koji odgovara kružnom luku veće dužine.

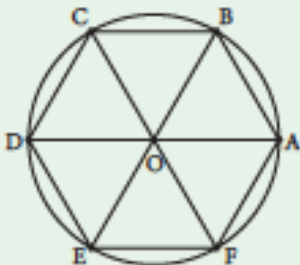
Primjer 4

U gradskom parku planiraju napraviti kružnu cvjetnu gredicu. Radnici su odlučili podijeliti kružnicu na šest jednakih dijelova kako bi zasadili različite vrste cvijeća.

- Nacrtaj kružnicu i označi tačke A, B, C, D, E, F kojima je kružnica podijeljena na šest jednakih dijelova.
- Nacrtaj centralne uglove koji odgovaraju svakom od šest dijelova. Koliki je svaki centralni ugao?
- Ako su tetive koje povezuju susjedne tačke kružnice jednake, da li su jednaki kružni lukovi koje one obuhvataju? Objasni.

Rješenje:

Koristi crtež i odgovori na pitanja.

**Zadatak 3**

Koliki dio kružnice odgovara centralnom uglu od:

- a) 120° b) 90° c) 240° d) 270° e) 40°

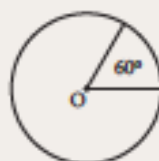
Kako su centralni uglovi, tetive i kružni lukovi povezani u kružnici i kako nam ta povezanost može pomoći da rješavamo probleme u svakodnevnom životu? Ako su date dvije kružnice s različitim radijusima, da li centralni uglovi od 90° obuhvataju iste dužine kružnih lukova? Objasni zašto.

Odgovori na pitanja u svojoj svesci. Podijeli odgovore sa školskim drugovima.

- Šta sam danas naučio/la što mi je bilo najzanimljivije ili najkorisnije?
- Da li ima situacija u stvarnom životu u kojima sam primijetio/la ili bih mogao/la primijeniti ovakve geometrijske koncepte?
- Mogu li nacrtati centralni ugao uglomjerom?
- Mogu li objasniti kako su kružni lukovi i tetive povezani sa centralnim uglovima?
- Šta bih uradio/la drugačije ako ponovo rješavam neki od zadataka u ovoj lekciji?

Samostalni rad

1. Nacrtaj kružnicu koja će predstavljati sat.
 - a) Podijeli kružnicu na 12 jednakih dijelova (sati).
 - b) Koliki centralni ugao obuhvata svaki od označenih kružnih lukova?
 - c) Ako označiš tri uzastopna sata (na primjer, od 12 do 3), koliki je centralni ugao nad ta tri sata?
 - d) Koliki centralni ugao opisuje velika kazaljka sata za vrijeme od 1, 2 ili 5 minuta?
2. U cvjetnoj bašti kružna gredica je podijeljena na 8 jednakih dijelova kako bi se zasadile različite vrste cvijeća.
 - a) Nacrtaj kružnicu i podijeli je na 8 jednakih dijelova.
 - b) Koliki centralni ugao odgovara jednom dijelu gredice?
 - c) Koliki centralni ugao obuhvataju dva uzastopna dijela?
 - d) Koliko dijelova je potrebno da se formira centralni ugao od 270° ?
3. U svakoj kružnici dat je centralni ugao nad jednim lukom:



- a) Koliki centralni ugao nedostaje da pokrije cijelu kružnicu kod svake od kružnica?
- b) Koliko jednakih dijelova bismo dobili ako se kružnica podijeli prema datim uglovima?

4. Na sportskoj stazi kružna staza je podijeljena na 9 jednakih dijelova za vježbanje.
 - a) Nacrtaj kružnicu i podijeli je na 9 jednakih dijelova.
 - b) Koliki centralni ugao odgovara jednom od datih dijelova?
 - c) Ako trkač pređe dva dijela, koliki centralni ugao je pokriven njegovom stazom?
 - d) Ako trkač pređe polovinu staze, koliko je dijelova prešao?
5. Kružni tanjir ukrašen je s 5 jednakih šara po svom obodu.
 - a) Nacrtaj kružnicu i podijeli je na 5 jednakih dijelova.
 - b) Koliki je centralni ugao svake šare?
 - c) Ako se dva dijela spoje u jednu šaru, koliki će biti novi centralni ugao?

Operacije s uglovima

Zamisli da uređuješ prostor u domu ili bašti. Da bi to uradio/la, možda ćeš trebati mjeriti ili izračunavati uglove, sabirati ih ili oduzimati da dobiješ tačne rezultate. U ovoj lekciji naučit ćeš kako pravilno izvoditi operacije s uglovima, kako pretvarati manje mjerne jedinice uglova i kako primjenjivati ove vještine u svakodnevnom životu.



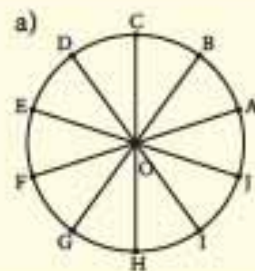
Primjer 1

Nacrtna je kružnica koja predstavlja vođeničko kolo. Kolo je podijeljeno na 10 jednakih dijelova radijusima koji se spajaju u centru točka. U svakoj tački gdje radijus siječe kružnicu zakačena je lopatica.

- a) Nacrtaj kružnicu i označi radijuse koji dijele kružnicu na 10 jednakih dijelova.
- b) Koliki je centralni ugao koji odgovara kružnom luku između dvije lopatice?
- c) Ako se dvije susjedne lopatice spoje, koliki centralni ugao će obuhvatati zajedno?

Rješenje:

- b) $360^\circ : 10 = 36^\circ$. Ugao između dvije lopatice je 36° .
c) Ako se dvije susjedne lopatice spoje, dobijeni centralni ugao je zbir uglova, odnosno: $36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$.
Znači, centralni ugao za dvije spojene lopatice je 72° .



Zadatak 1

Na kružnici su data dva centralna ugla α i β , tako da je $\alpha = \beta$.

- a) Šta možeš zaključiti o tetivama koje odsijecaju ovi uglovi?
b) Šta možeš zaključiti o kružnim lukovima koje odsijecaju ovi uglovi? (Nacrtaj kružnicu, označi centralne uglove i tetive i pokušaj da ih uporediš!)

Za preciznija mjerenja i određivanje veličine ugla, pored stepena koriste se i sljedeće mjere: $1'$ (1 minuta) i $1''$ (1 sekunda).

Jedan stepen ima 60 minuta, a 1 minuta ima 60 sekundi.

To znači: $1^\circ = 60' = 3600''$.

Primjer 2

U sportskoj sali nastavnik je postavio 3 trake na podu koje se sijeku u jednoj tački, formirajući različite uglove čiji zbir je 360° . Zahtjevi za učenike su:

- a) Koristi uglomjer da izmjeriš svaki od uglova između traka i zapiši rezultate u stepenima.
b) Ako jedan stepen ima 60 minuta, koliko minuta ima ugao od x° (npr., 30°)?
c) Ukoliko ugao nije cijeli broj, kako da pretvoriš ostatak stepeni u minute?
d) Ako jedna minuta ima 60 sekundi, koliko sekundi ima ugao od y' (npr., $15'$)?
e) Ukoliko ugao sadrži i minute i sekunde, kako se pretvara cijela vrijednost u sekunde?
f) Ukoliko je ugao između traka $45,5^\circ$, kako će se izraziti u minutama i sekundama?
g) Provjeri da li svi izmjereni uglovi daju zbir od 360° . Objasni zašto je ova provjera potrebna?

Rješenje:

- a) Na primjer: Uglovi između traka izmjereni su kao $45,5^\circ$, 90° i $224,5^\circ$.
b) Pretvaranje stepeni u minute: Za $45^\circ = 45^\circ \cdot 60' = 2700'$.
c) Na primjer za: $45,5^\circ$, iz b) $45^\circ = 2700'$.

Ostatak, odnosno decimalni dio $0,5^\circ$ pretvara se u minute: $0,5^\circ \cdot 60' = 30'$.

Znači, $45,5^\circ = 45^\circ 30'$, odnosno u minutama ukupno $2700' + 30' = 2730'$.

d) Pretvaranje minuta u sekunde: Na primjer za $30' = 30 \cdot 60'' = 1800''$.

e) $45^\circ 30' = (45 \cdot 3600 + 30 \cdot 60)'' = 163800''$

f) Znači, $45,5^\circ = 45^\circ 30' 0''$.

g) Zbir uglova: $45,5^\circ + 90^\circ + 224,5^\circ = 360^\circ$. Dobijen je potvrđen odgovor, zbir uglova je tačan jer su tri ugla, kako su određena od početka, treba da formiraju puni ugao.

Primjer 3

Jedna grupa učenika želi kreirati novu školsku zastavu. Odlučili su da na zastavi budu nacrtana dva trougla različitih boja. Trouglovi imaju uglove mjera $65^\circ 20'$ i $72^\circ 40'$. Izračunaj treći ugao.

Rješenje:

Sabiranje prva dva ugla: $65^\circ 20' + 72^\circ 40' = (65^\circ + 72^\circ) + (20' + 40')$.

Saberi stepene:

$65^\circ + 72^\circ = 137^\circ$.

Saberi minute:

$20' + 40' = 60'$.

$60'$ e 1° : Znači $137^\circ + 1^\circ = 138^\circ$.

Izračunavanje trećeg ugla: Oduzmi zbir prva dva ugla od 180° , odnosno

$180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$.

Provjera: Zbir tri ugla je: $65^\circ 20' + 72^\circ 40' + 42^\circ = 180^\circ$.

Primjer 4

Dani su uglovi $\alpha = 103^\circ 17' 34''$ i $\beta = 48^\circ 46' 38''$. Izračunaj:

a) $\alpha + \beta$ b) $\alpha - \beta$

Rješenje:

a) $103^\circ 17' 34''$

$+ 48^\circ 46' 38''$

 $151^\circ 63' 72''$

 $151^\circ 64' 12''$

 $152^\circ 4' 12''$

Slično kao i pri sabiranju neimenovanih brojeva, i ovdje se operacije izvode počevši s desna na lijevo. U dobijenom zbiru trebamo napraviti korekcije koristeći odnose između mjernih jedinica za ugao, $72'' = 60'' + 12'' = 1' 12''$, $63' + 1' = 64'$, $64' = 1^\circ 4'$.

Tako dobijamo $\alpha + \beta = 151^\circ 63' 72'' = 152^\circ 4' 12''$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 103^\circ 17' 34'' \\ - 48^\circ 46' 38'' \\ \hline \end{array}$$

Budući da od $34''$ treba da oduzmemo $38''$, od $17'$ uzimamo $1' = 60''$ i kod sekundi dobijamo $34'' + 60'' = 94''$; slično kod minuta: sada od $16'$ treba da oduzmemo $46'$, pa uzimamo $1^\circ = 60'$ od 103° i kod minuta dobijamo $16' + 60' = 76'$, a kod stepeni ostaje 102° . Tada će razlika biti izračunata na sljedeći način:

$$\begin{array}{r} 102^\circ 76' 94'' \\ 103^\circ 17' 34'' \\ - 48^\circ 46' 38'' \\ \hline 54^\circ 30' 56'' \end{array}$$

Konačno se dobija $\alpha - \beta = 54^\circ 30' 56''$.

Zadatak 2

Izračunaj: a) $25^\circ 40' 30'' + 30^\circ 25' 45''$ b) $22^\circ 35' 50'' - 18^\circ 20' 55''$

Primjer 5

Inženjeri koji kreiraju solarne panele treba da odrede uglove za optimalno postavljanje panela kako bi iskoristili sunčevu svjetlost. Jedan panel ima ugao od $47^\circ 30'$, a drugi panel treba biti postavljen tako da ukupni ugao između panela bude $110^\circ 15'$.

a) Koliki je ugao drugog panela?

b) Ako drugi panel treba dodatno da se nagne za $5^\circ 20'$, koliki će biti novi ugao drugog panela?

Rješenje:

- a) Proračun ugla drugog panela: Ukupni ugao između dva panela je $110^\circ 15'$. Prvi panel ima ugao od $47^\circ 30'$. Oduzima se ugao prvog panela od ukupnog ugla: $110^\circ 15' - 47^\circ 30' = 62^\circ 45'$ (ugao drugog panela).
- b) Proračun novog ugla drugog panela: Drugi panel se dodatno nagine za $5^\circ 20'$. Saberi početni ugao drugog panela s ovom promjenom: $62^\circ 45' + 5^\circ 20' = 68^\circ 5'$ (novi ugao drugog panela).

Zadatak 3

Inženjeri koji rade na dizajniranju novog krovnog sistema za fabriku trebaju odrediti uglove dijelova krova kako bi se osigurala maksimalna stabilnost i efikasnost. Jedan od glavnih elemenata konstrukcije je noseća greda koja formira ugao od $48^\circ 45'$ s osnovom krova. Da bi se izbjeglo nepotrebno opterećenje konstrukcije, druga greda treba da formira ugao od $120^\circ 30'$ s nosećom gredom.

- a) Koliki je ugao između druge grede i osnove krova? Kako ćeš izračunati ovaj ugao ako znaš da zbir uglova između nosećih greda i osnove krova treba da bude 180°
- b) Ako druga greda treba da bude postavljena pod uglom koji je za $5^\circ 15'$ veći od prethodno izračunatog ugla, koliki će biti novi ugao između druge grede i osnove krova? Kako ćeš provjeriti tačnost promjene ugla?



Kako će promjena uglova u konstrukciji krova uticati na stabilnost cijele strukture? Šta bi se dogodilo ako se uglovi previše povećaju ili smanje, i kako bi se rješavala ova situacija pri projektiranju drugih arhitektonskih elemenata? Istražuj!

Odgovori na pitanja u svojoj svesci. Odgovor na svako pitanje potvrdi svojim primjerom.

- Mogu li pravilno pretvarati uglove iz većih u manje mjere i obrnuto?
- Mogu li sabirati i oduzimati uglove?
- Mogu li primijeniti ove operacije u svakodnevnim situacijama?

Samostalni rad

- Izračunaj $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ ako:
 - $\alpha = 82^\circ 17'$, $\beta = 53^\circ 37' 46''$, b) $\alpha = 183^\circ 15' 47''$, $\beta = 98^\circ 4' 52''$
 - $\alpha = 205^\circ$, $\beta = 118^\circ 53' 26''$
- Krećući se putem, automobil mora proći tri krivine. Na prvoj krivini odgovara ugao od $35^\circ 45' 30''$, na drugoj krivini ugao od $72^\circ 10' 15''$, a na trećoj krivini ugao od $58^\circ 25' 45''$.
 - Izračunaj ukupni ugao krivina koje je automobil napravio.
 - Ako automobil treba da napravi dodatnu krivinu s uglom od $12^\circ 50' 30''$, koliki će biti novi ukupni ugao?
- Dati su uglovi $\alpha = 103^\circ 16' 33''$ i $\beta = 61^\circ 47' 37''$. Izračunaj: a) $\alpha + \beta$ b) $\alpha - \beta$
- Neka $\alpha = 79^\circ 57' 43''$, $\beta = 180^\circ$, $\gamma = 27^\circ 19'$. Izračunaj: a) $\alpha + \beta + \gamma$ b) $\beta - \gamma$
- Odredi ugao α ako $\beta + \gamma = 111^\circ 43'$ i $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.
- Ugao $\alpha = 2 \cdot \beta$, $\beta = 35^\circ 35'$ i $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Koliki su ugao α i ugao γ ?

Grafičko sabiranje i oduzimanje uglova

U arhitekturi, dizajnu, pa čak i u svakodnevnom životu često je potrebno da konstruiramo uglove s preciznošću. Na primjer, pri izradi namještaja ili dizajniranju objekata, može se pojaviti potreba da se kreira tačan ugao jednak nekom već postojećem. U ovoj lekciji naučit ćeš kako konstruirati ugao jednak datom uglu koristeći šestar i lenjir i kako to primijeniti u sabiranju i oduzimanju uglova šestarom pri rješavanju zadataka.



Primjer 1

U tvojoj svesci nacrtaj ugao koji je jednak α datom na crtežu. Kako bi to uradio?



Primjer 2

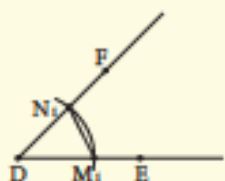
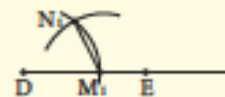
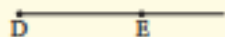
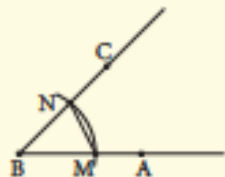
Grafičko prenošenje ugla jednakog datom uglu.

Rješenje:

Sljedi korake i crtaj u svojoj svesci.

- Nacrtaj $\angle ABC$.
- Nacrtaj polupravu DE .
- Postavi iglu šestara u teme ugla $\angle ABC$ i iscrtaj luk koji siječe krake ugla u tačkama M i N .
- Sa istim otvorom šestara napravi kružni luk sa centrom u tački D . Presjek poluprave s početnom tačkom D označi kao M_1 .
- Izmeri dužinu tetive koja odgovara kružnom luku koji si nacrtao kod $\angle ABC$, odnosno $\overline{MN}$.
- Sa istim otvorom šestara prenesi tu dužinu stavljajući iglu šestara u tačku M_1 . Presjek dva luka označi kao N_1 .
- Povuci drugi krak traženog ugla, odnosno DN_1 (F je tačka na polupravi DN_1). Dobijeni ugao $\angle EDF$ je jednak $\angle ABC$.

Pokušaj odgovoriti na sljedeće pitanje: Koje svojstvo centralnog ugla se koristi pri postupku grafičkog prenošenja ugla?



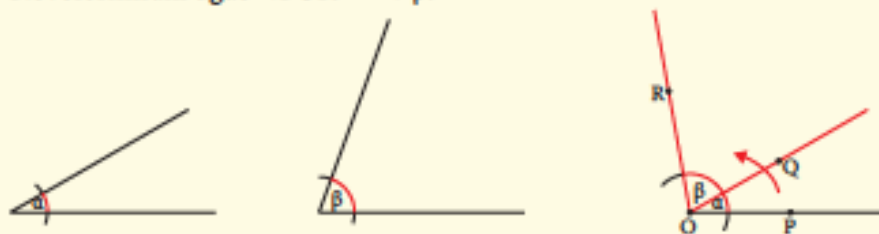
Primjer 3

Nacrtaj dva ugla α i β u tvojoj svesci. Zatim slijedi korake da grafički sabereš uglove α i β .

Rješenje:

Koraci:

- Konstruiraj ugao $\angle POQ$, jednak uglu α , prema koracima iz primjera 2.
- Drugi krak $\angle POQ$, OQ , bit će prvi krak za ugao koji ćeš konstruirati jednak uglu β , čije će teme također biti tačka O .
- Drugi krak ugla jednakog uglu β neka bude označen kao OR .
- Novoformirani ugao $\angle POR = \alpha + \beta$.



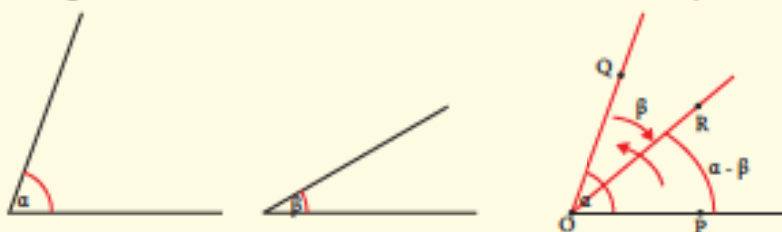
Primjer 4

Nacrtaj dva ugla α i β , gdje je $\alpha > \beta$, u tvojoj svesci. Zatim slijedi korake da oduzmeš ugao β od α koristeći šestar.

Rješenje:

Koraci:

- Najprije, prema koracima iz primjera 2, radimo grafičko prenošenje ugla α (u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu).
- Dobijeni ugao koji je jednak α označimo kao $\angle POQ$.
- Grafički prenosimo ugao β , tako da, ako za početni krak uzmemo OQ , u smjeru kazaljke na satu prenosimo β , odnosno $\beta = \angle QOR$.
- Ugao određen kracima OR i OP , odnosno $\angle POR = \alpha - \beta$.



Zadatak 1

Nacrtaj ugao $\alpha = 35^\circ$ i ugao $\beta = 105^\circ$. Konstruiraj ugao: $\gamma = \alpha + \beta$ i ugao $\delta = \beta - \alpha$.

Primjer 5

Jedan kapetan upravlja malim brodom i treba da vodi brod kroz kanal. Zato treba da napravi dva skretanja. Prvo, treba da skrene za ugao od 65° udesno, a potom za ugao od 40° ulijevo. Na kraju puta kapetan želi provjeriti tačan smjer broda u odnosu na početni smjer. Koliki je konačni ugao skretanja?

Rješenje:

Iz uslova zadatka prvo skretanje je 65° udesno, a drugo skretanje je 40° ulijevo. Konačni ugao skretanja naći će se oduzimanjem uglova. Objasni zašto? Računom dobijamo: $65^\circ - 40^\circ = 25^\circ$. Znači, konačni ugao skretanja je 25° udesno u odnosu na početni smjer..

Grafičko rješenje:

- Nacrtaj ugao od 65° i ugao od 40° .
- Povuci pravu AB koja predstavlja početni smjer broda. Izaberi tačku O na pravoj AB.
- Prenesi ugao od 65° s vrhom u O desno od prave AB i označi ga kao $\angle XOY$.
- Prenesi drugi ugao od 40° ulijevo, počevši od kraka OY.
- Nacrtaj polupravu OZ.
- Izmjeri ugao između početnog smjera AB (OX) i konačnog smjera broda OZ.
- Taj ugao je 25° , što znači da je brod završio 25° udesno u odnosu na početni smjer.

Zadatak 2

Jedan saobraćajni inženjer uređuje trotoar sa stazama koje se ukrštaju

Jedna staza s trotoarom zahvata ugao od 75° , a druga staza treba da se postavi pod neki ugao, tako da zajedno s prvom stazom formiraju pravi ugao. Inženjer želi da sazna:

- Pod kojim uglom u odnosu na prvu stazu treba postaviti drugu stazu, tako da ona formira pravi ugao s trotoarom?
- Kasnije, ako treba dodati treću stazu sa suprotne strane trotoara pod uglom od 30° s trotoarom, koliki je ugao između prve i treće staze, kao i između treće i druge staze?

Zamisli da planiraš vrtanu stazu u obliku trougla s jednim uglom od 90° , a druga dva ugla treba da budu jednaka. Kako ćeš konstruirati te uglove da staza izgleda pravilno?

Odgovori na pitanja u svojoj svesci. Ako za odgovor na neko pitanje nisi siguran/na, ponovo pregledaj primjer iz lekcije koji se odnosi na pitanje.

- Mogu li konstruirati ugao jednak datom uglu?
- Mogu li konstruirati zbir i razliku dva ugla?
- Mogu li primijeniti ove vještine za rješavanje zadataka iz stvarnog života?

Samostalni rad

Pronađi grafička rješenja.

- Jedan inženjer dizajnira saobraćajnu raskrsnicu sa četiri puta koji se ukrštaju u jednoj tački kao na slici. Prvi sa drugim putem zahvata ugao od 120° , a treći sa četvrtim 45° .

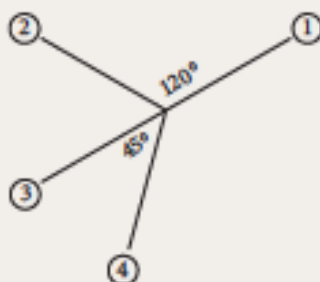
 - Konstruiraj ugao koji zahvataju drugi s trećim putem, ako prvi i treći put formiraju ravan ugao.
 - Konstruiraj zbir tri ugla (između prvog i drugog puta, drugog i trećeg puta, trećeg i četvrtog puta).
 - Konstruiraj ugao koji će zahvatati prvi i četvrti put.
- Jedan stolar izrađuje ram za sto u obliku trougla. Jedan ugao na ramu je 88° . Konstrukcijom odgovori na pitanja:

 - Koliki iznosi zbir druga dva ugla?
 - Ako je jedan od njih 62° , koliki iznosi treći ugao?
- Jedan tehničar postavlja solarne panele na krov. Paneli treba da budu nagnuti pod uglom od 35° u odnosu na horizontalu. Kasnije, tehničar otkriva da treba da poveća nagib za dodatnih 12° za optimalnu izloženost suncu. Konstrukcijom odgovori na pitanja:

 - Koliki će biti konačni ugao nagiba?
 - Ako želi da vrati 8° unazad od prilagođenog ugla, koliki će biti konačni ugao?
- Vera u dvorištu svog doma kreira cvjetnu gredicu koja ima oblik četverougla. Prvi ugao cvjetne gredice iznosi 110° , drugi ugao je 95° , a treći ugao treba da bude 85° .

 - Konstrukcijom odredi koliki je četvrti ugao, znajući da je zbir svih uglova u četverouglu 360° .
 - Ako Vera odluči da smanji treći ugao za 10° , kako će to uticati na četvrti ugao?
- Konstruiraj ugao kao razliku uglova 150° i 60° .
- Dati su uglovi: $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 87^\circ$ i $\gamma = 35^\circ$. Konstruiraj ugao:

 - $\alpha + \beta - \gamma$
 - $\alpha - \beta + \gamma$
- Nacrtaj jedan tup ugao i jedan oštar ugao. Konstrukcijom odredi njihovu razliku.



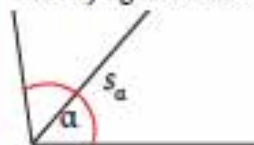
Konstrukcija simetrale ugla i uglova od 60° , 30° , 15° , 90° , 45°

Uglovi od 60° , 30° , 15° , 90° i 45° veoma su često prisutni u različitim disciplinama, kao što su arhitektura, dizajn, inženjerstvo i svakodnevne aktivnosti. Oni su važni za stvaranje preciznih i pravilnih objekata, a također se koriste i za rješavanje matematičkih i geometrijskih zadataka. U ovoj lekciji naučit ćeš kako da konstruišeš ove uglove koristeći jednostavne alate, kao što su šestar i lenjir.



Primjer 1

Nacrtaj ugao od 98° . Uglomjerom i lenjirom nacrtaj simetralu ugla.



Primjer 2

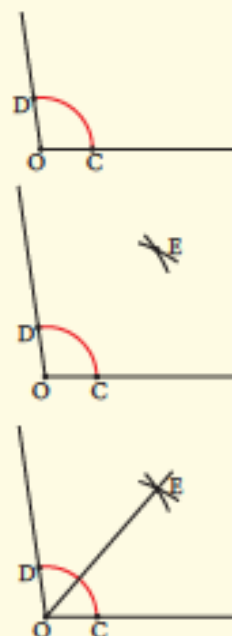
Konstruiraj simetralu ugla od 108° .

Rješenje:

Slijedi korake i crtaj u svoju svesku.

Koraci za konstruiranje simetrale ugla od 108° šestarom:

- Uz pomoć uglomjera, nacrtaj ugao od 108° . Označi teme ugla slovom O.
- Postavi vrh šestara u tačku O (teme ugla).
- S proizvoljnim radijusom (otvorom šestara) iscrtaj luk koji siječe krake ugla u tačkama C i D, redom.
- Postavi vrh šestara u tačku C, prilagodi radijus tako da bude malo veći od polovine rastojanja između C i D.
- Nacrtaj luk u unutrašnjosti ugla.
- Ne mijenjajući radijus, postavi vrh šestara u tačku D i nacrtaj drugi luk koji će se sjeći s prvim lukom. Označi tačku presjeka ovih lukova kao E.
- Uz pomoć lenjira poveži teme O s tačkom E. Poluprava OE je simetrala ugla od 108° . Provjera:
- Uglomjerom izmjeri dva ugla koja simetrala (OE) formira s kracima OA i OB. Oni treba da budu jednaki, odnosno po 54° svaki.



Zadatak 1

Nacrtaj ugao od 180° . Konstruiraj simetralu ugla. Koliko stepeni ima svaki ugao koji se formira simetralom?

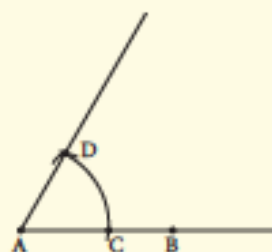
Primjer 2

Konstrukcija ugla od 60° .

Rješenje:

Crtaj u svoju svesku slijedeći korake za konstrukciju ugla od 60° šestarom:

- Lenjirom nacrtaj polupravu AB.
- Postavi vrh šestara u tačku A.
- Odaberi proizvoljan radijus (ne prevelik) i nacrtaj luk koji siječe polupravu AB. Označi tačku presjeka luka s polupravom kao C.
- Ne mijenjajući radijus šestara, postavi vrh šestara u tačku C.
- Nacrtaj novi luk koji siječe prethodni luk. Označi tačku presjeka dva luka kao D.



Lenjirom nacrtaj polupravu AD. Ova poluprava je drugi krak ugla.

- Ugao $\angle BAD$ koji formiraju kraci AB i AD je ugao od 60° .
- Možeš li objasniti zašto se ovom konstrukcijom dobija baš ugao od 60° ?

Zadatak 2

Iskoristi svoje znanje o konstrukciji ugla od 60° i simetrale ugla da konstruiráš ugao od 30° i ugao od 15° .

Primjer 3

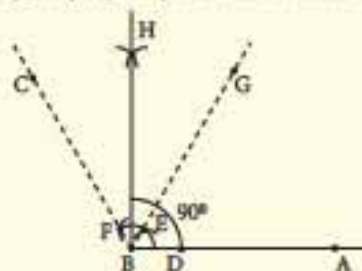
Konstruiraj ugao od 90° .

Rješenje:

Koraci za konstrukciju ugla od 90° šestarom:

- Lenjirom nacrtaj polupravu BA. Tačka B će biti teme ugla koji ćeš konstruirati.
- Postavi vrh šestara u tačku B i odaberi proizvoljan radijus.
- Šestarom nacrtaj kružni luk sa centrom u B koji siječe polupravu BA u tački D.
- Ne mijenjajući radijus šestara, postavi vrh šestara u tačku D i nacrtaj luk koji siječe prethodni kružni luk u tački E.
- S istim radijusom šestara postavi vrh u tačku E i nacrtaj luk koji siječe prvi kružni luk po drugi put (u tački F).

- Lenjirom poveži tačku B s tačkom E, a zatim tačku B s tačkom F.
 - $\angle ABF$ je ugao od 120° . Objasni!
- Koji je posljednji korak da dobiješ ugao od 90° (odnosno $\angle ABH$)? Da bi odgovorio na ovo pitanje, podsjeti se na konstrukciju simetrale ugla.

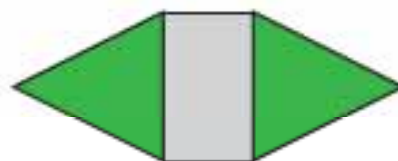


Zadatak 3

Iskoristi konstrukciju ugla od 90° da konstruiraš ugao od 45° .

Primjer 4

Mateo je učenik koji želi dizajnirati ram za sliku koji će napraviti u školskoj radionici. Ram treba da ima dvije vrste uglova: uglove od 90° za ram i uglove od 60° za dekorativne elemente rama, kao na crtežu.



Rješenje:

Mateo ima šestar i lenjir. Iskoristi korake za konstruiranje uglova od 90° i 60° da pomogneš Mateu da izradi uglove na ramu. Koraci:

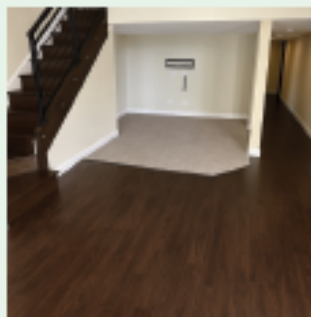
- Koristeći šestar i lenjir, Mateo će konstruirati četiri ugla od 90° kako bi formirao pravougaoni ram.
- Za dekorativne uglove, Mateo će koristiti korake za konstruiranje ugla od 60° , preko formiranja jednakostraničnog trougla (svi uglovi u ovom trouglu su po 60°).
- Mateo će postaviti uglove od 60° na dvije paralelne strane rama.
- Mateo će provjeriti jesu li uglovi precizno formirani koristeći uglomjer da izmjeri uglove i uvjeri se da ram ima tačne uglove od 90° i dekorativne dijelove s uglovima od 60° .

Zadatak 4

Data je prava i tačka A na njoj. Sa temenom u tački A, konstruiraj ugao koji predstavlja zbir uglova od 45° i 30° koristeći korake za konstrukciju svakog od uglova.

- Koliki je dobijeni ugao?
- Koliki je ugao koji je upoređan s dobijenom?

Kako tačno razumijevanje i primjena metoda za konstrukciju specifičnih uglova mogu utjecati na rješavanje geometrijskih problema i na svakodnevnu upotrebu geometrijskih principa? Koristi slike da odgovoriš na pitanje.

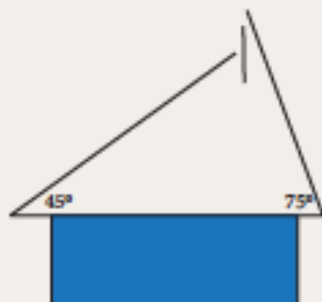


Odgovori na pitanja u svojoj svesci. Za konstrukciju nekih uglova, ako imaš potrebu, vrati se na primjere iz lekcije.

- Mogu li konstruirati uglove od 30° , 45° , 60° , 90° i 15° ?
- Mogu li primijeniti ove uglove u različitim praktičnim situacijama?
- Da li pravilno koristim alate (šestar i lenjir) za konstruiranje tačnih uglova?

Samostalni rad

1. Konstruiraj ugao od 60° , a zatim samo šestarom i lenjirom podijeli ga na dva dijela tako da jedan bude 3 puta veći od drugog.
2. Projekat izgradnje krova za kuću predviđa nagib od 75° u odnosu na horizontalnu ravan, a s druge strane nagib od 45° . Prikaži oba ugla konstrukcijom. U prilogu je data skica za izgled krova gledano sa strane



3. Konstruiraj ugao od:

- a) 150° b) 135° c) 210° d) $37^\circ 30'$

4. Izgradnja saobraćajnog rješenja za veliki nadvožnjak zahtijeva konstrukciju uglova od 105° i 45° . Uradi to u svojoj svesci i zapiši korake konstrukcije.



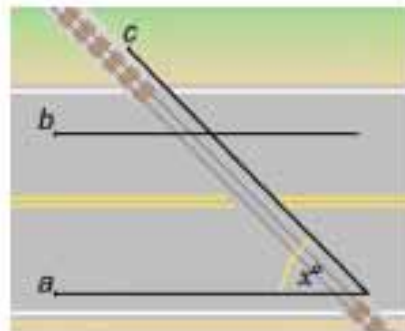
5. Kao što smo napomenuli u lekciji „Konstrukcija geometrijskih elemenata obrazovnim softverom“, tehnologija i softverski alati su odlični saveznici u nastavi jer nude dinamične alternative tradicionalnom ručnom crtanju. Softveri kao što su GeoGebra, Geometer's Sketchpad i drugi slični alati omogućavaju dinamičnu interakciju s geometrijskim objektima i čine matematiku razumljivijom i bližom stvarnom životu.

Zadatak:

Istražuj pomoću nekog geometrijskog softvera crtanje uglova zadane veličine i određivanje njihovih simetrala. Različite aplikacije nude različite alate i mogućnosti, ali u svakom slučaju obezbjeđuju brz, zanimljiv i interaktivan pristup pri rješavanju matematičkih problema.

Transverzale i paralelne prave

U ovoj lekciji ćeš istraživati transverzale i paralelne prave, dva važna koncepta u geometriji koji imaju široku primjenu u svakodnevnom životu, kao što su putni ili inženjerski planovi. Kroz razumijevanje uglova koji se formiraju na transverzali i paralelnim pravama, upoznat ćeš se s problemima koji se rješavaju pri projektiranju i izgradnji različitih struktura.



Primjer 1

Andrea i Petar igraju igru na plaži. Andrea je nacrtala dvije linije u pijesku koje se sijeku jedna s drugom. Petar ima zadatak da odredi koji uglovi su susjedni, uporedni i unakrsni.

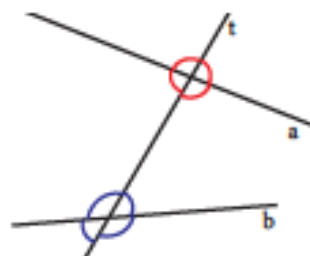
Rješenje:

- U ovom slučaju uglovi $\angle 1$ i $\angle 2$ su susjedni uglovi. Objasni zašto.
- Uporedni uglovi su također $\angle 1$ i $\angle 2$, $\angle 3$ i $\angle 4$, $\angle 3$ i $\angle 2$, $\angle 1$ i $\angle 4$. Objasni zašto.
- Unakrsni uglovi su $\angle 1$ i $\angle 3$, $\angle 4$ i $\angle 2$. Objasni zašto.



Primjer 2

- Objasni crtež.
- Koliko je uglova formirano?
- Istraži uglove koje formiraju prava t i paralelne prave a i b .



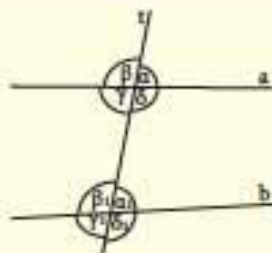
Rješenje:

- Transverzala je prava koja siječe dvije ili više pravih u različitim tačkama. Pri ovom presijecanju formiraju se različite vrste uglova.
- Transverzalom je formirano 8 uglova, po četiri sa svakom od pravih.



c) Vrste uglova koje se formiraju transverzalom:

- Unutrašnji uglovi: uglovi koji se nalaze između pravih i transverzale. Koji su to uglovi?
- Vanjski uglovi: uglovi koji se nalaze izvan pravih, na strani suprotnoj od unutrašnjih uglova. Koji su to uglovi?



Saglasnim uglovima zovemo one parove uglova koji:

- nemaju zajedničko teme
- leže na istoj strani transverzale
- jedan je unutrašnji, a drugi vanjski ugao.

U našem primjeru, **saglasni** uglovi su sljedeći parovi uglova: α i α_1 ; β i β_1 ; γ i γ_1 ; δ i δ_1 .

Naizmjeničnim uglovima zovemo one parove uglova koji:

- nemaju zajedničko teme
- leže na različitim stranama transverzale
- oba su unutrašnja ili oba su vanjska ugla.

U našem primjeru, **naizmjenični** uglovi su sljedeći parovi uglova: α i γ_1 ; β i δ_1 ; δ i β_1 ; γ i α_1 .

Suprotnim uglovima zovemo one parove uglova koji:

- nemaju zajedničko teme
- leže na istoj strani transverzale
- oba su unutrašnja ili oba su vanjska.

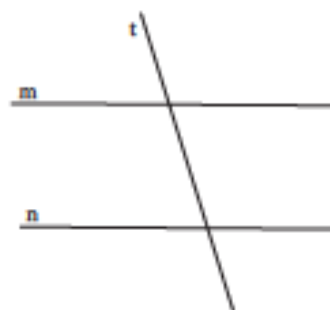
U našem primjeru, **suprotni** uglovi su sljedeći parovi uglova α i δ_1 ; β i γ_1 ; γ i β_1 ; δ i α_1 .

Zadatak 1

Na crtežu paralelne prave m i n presječene su transverzalom t (transverzala paralelnih pravih).

Precrtaj ga u svoju svesku i označi sljedeće uglove:

- Unutrašnje uglove.
- Vanjske uglove.
- Izaberi dva para naizmjeničnih uglova, objasni na kojoj strani transverzale se nalaze i da li su unutrašnji ili vanjski.
- Izaberi dva para suprotnih uglova, objasni na kojoj strani transverzale se nalaze i da li su unutrašnji ili vanjski.



Ako su prave a i b paralelne i t je transversala, tada:

saglasni uglovi
su jednaki



naizmjenični uglovi
su jednaki

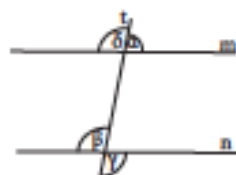


suprotni uglovi
su suplementarni



Zadatak 2

Odredi uglove označene slovima na crtežu i objasni svoj odgovor. Na crtežu je $m \parallel n$ i $\alpha = 67^\circ$. Izračunaj uglove β , γ i δ .



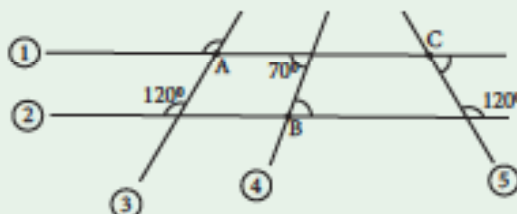
Primjer 3

Izradi rješenje za saobraćajnicu koja uključuje dvije paralelne glavne ceste i tri sporedne koje sijeku prve dvije. Ceste i neke od tačaka presjeka date su na crtežu. Izračunaj uglove u označenim tačkama i objasni kako će se veze među tim uglovima koristiti u stvarnom svijetu.

Rješenje:

$\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Objasni zašto.

Istražuj kako uglovi utiču na: bezbjednost na cestama, izgradnju infrastrukture, navigaciju i orijentaciju, kao i ekonomsku analizu.



Zadatak 3

Jedan inženjer radi na dizajnu parka koji će sadržavati:

- Dvije paralelne ograde koje ograničavaju prostor parka (paralelne prave a i b).
 - Tri staze koje presijecaju park i povezuju se s ogradama pod različitim uglovima (transverzale t_1 , t_2 i t_3).
- a) Odredi koliko će se uglova formirati pri presijecanju staza t_1 , t_2 i t_3 s paralelnim ogradama a i b .
 - b) Koristi pojmove unutrašnji, vanjski, saglasni, suprotni i naizmjenični uglovi da objasniš uglove koji se formiraju.
 - c) Zapiši po jedan par iz svake vrste uglova na transverzalama t_1 , t_2 i t_3 .

Razmisli o situaciji u kojoj se dva paralelna puta sijeku pravom normalnom na njih. Kakvi su uglovi koji se formiraju sa presječnom pravom?



Nacrtaj dvije paralelne prave i transversalu u svojoj svesci. Odgovori na pitanja koristeći crtež koji si nacrtao.

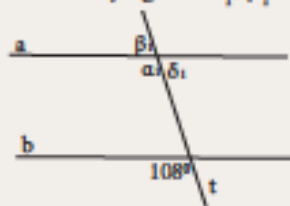
- Da li razlikujem uglove koji se formiraju između transversale i paralelnih pravih?
- Mogu li izračunati nepoznate uglove kada imam dati ugao?
- Kako mogu primijeniti ove koncepte u inženjerskim ili saobraćajnim planovima?

Samostalni rad

- Dvije paralelne prave a i b presječene su transversalom t , pri čemu je jedan od unutrašnjih uglova 65° .
 - Označi sve druge uglove koji se formiraju.
 - Identificiraj koji uglovi su unutrašnji, vanjski, naizmjenični, suprotni i saglasni.
 - Odredi sve formirane uglove.
- Inženjer projektuje most koji s rijekom formira ugao od 75° , ali most presijeca i obale koje su paralelne.
 - Identificiraj naizmjenične i saglasne uglove.
 - Izračunaj sve uglove koji se formiraju između mosta i obala.
- U urbanističkom planu, dvije paralelne ulice a i b sijeku se s drugom ulicom kao transversalom t . Pri mjerenju jedan ugao s temenom u presječnoj tački jedne od pravih a ili b s transversalom iznosi 45° . Izračunaj sve druge uglove koji se formiraju.
- Na crtežu $m \parallel n$ i δ je 5 puta manji od α . Nađi uglove α i δ .



- Paralelne prave a i b presječene su pravom t . Jedan od uglova je 108° . Izračunaj uglove δ_1 , β_1 i α_1 !



Konveksni i nekonveksni mnogougao

U ovoj lekciji ćeš naučiti kako razlikovati konveksne od nekonveksnih mnogougao. Ovi geometrijski oblici su osnova za dalje proučavanje geometrije. Pravilno razumijevanje njihovih karakteristika veoma je važno da bi ih mogao klasificirati i koristiti u različitim oblastima, kao što su arhitektura, inženjerstvo i prirodne nauke.

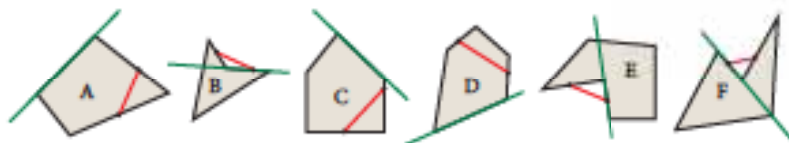


Primjer 1

Napravi misaonu mapu s osnovnim pojmom mnogougao. Pokušaj uključiti i već naučene pojmove i klasifikacije u vezi s tim pojmom.

Primjer 2

Iskoristi crtež i odgovori na pitanja



- U svakom mnogougaojku je povučena duž. Šta možeš reći o duži u svakom mnogougaojku?
- Po jednoj od stranica svakog mnogougaojka povučena je prava. Koja je razlika među mnogougaojcima u odnosu na tu pravu?

Rješenje:

- Kod nekih mnogougaojka duž nije sadržana u mnogougaojku. Da li to važi za svaku duž kod nekih mnogougaojka? Za koje mnogougaojke?

Jedan mnogougaojnik naziva se konveksnim ako je konveksna geometrijska 2D-forma, odnosno ako za svake dvije tačke A i B tog mnogougaojka duž AB je sadržana u njemu.

- Kod mnogougaojka A, B i D može se uočiti da je mnogougaojnik u potpunosti s jedne strane prave, a kod mnogougaojka E i F mnogougaojci nisu u potpunosti s iste strane te prave. Da li to važi za svaku stranicu mnogougaojka na kojoj je nacrtana prava koja sadrži tu stranicu? Za koje mnogougaojke si odgovorio DA, a za koje NE?

Možemo zaključiti:

1. Ako za svaku stranicu mnogougona nacrtamo pravu koja sadrži tu stranicu i cijeli mnogougao ostaje s iste strane te prave, tada je mnogougao konveksan.
2. Ako za neku stranicu mnogougona nacrtamo pravu koja sadrži tu stranicu, a dio mnogougona ostaje s suprotne strane te prave, tada mnogougao nije konveksan, već je nekonveksan.

Zadatak 1

Na crtežu postoje dvije 2D-forme.

- a) Da li je prva 2D-forma konveksna ili nekonveksna? Objasni svoj odgovor.
- b) Da li je druga 2D-forma konveksna ili nekonveksna? Objasni svoj odgovor.



Primjer 3

Marko i Lena odlučuju postaviti ogradu oko svoje bašte u dvorištu. Oni imaju dvije opcije: oграда u obliku konveksnog mnogougona ili oграда u obliku nekonveksnog mnogougona.

- a) Koju ogradu će im biti lakše napraviti?
- b) Koji oblik ograde ima uglove ili dijelove koje će trebati označiti drugačije ili će trebati dodatni rad?
- c) Koje bi bile prednosti i nedostaci ograde konveksnog mnogougona u poređenju s nekonveksnim mnogougonom?

Rješenje:

- a) Konveksni mnogougao (prva opcija): Ograda će se moći lako postaviti jer će čitav oblik biti s iste strane prave koja sadrži svaku od stranica mnogougla.
- b) Nekonveksni mnogougao (druga opcija): Kod nekih stranica i uglova mogu se javiti poteškoće pri postavljanju ograde jer će dio oblika biti sa suprotne strane određene prave.
- c) Izbor ograde i način postavljanja može zavisiti od toga da li je bašta konveksni ili nekonveksni mnogougao. Kod konveksnih mnogouglova biće lakše postaviti ogradu, dok kod nekonveksnih mnogouglova treba napraviti dodatna prilagođavanja.

Zadatak 2

Gdje se susreću konveksni mnogougaonici, a gdje nekonveksni?



Zadatak 3

Pogledaj neke predmete u svojoj okolini, na primjer, predmete u domu ili u prirodi, i odredi da li su u obliku konveksnih ili nekonveksnih mnogougaonika. Napiši nekoliko primjera i objasni zašto ih klasificiraš na taj način.

Zamisli da treba da dizajniraš novi objekat za javni prostor (kao park ili trgovački centar). Kako ćeš odlučiti da li ćeš koristiti konveksne ili nekonveksne forme u dizajnu? Kakve prednosti i nedostatke će imati ove forme u izgradnji i upotrebi objekta? Istraži kako uglovi utiču na funkciju i estetiku prostora?

Odgovori na pitanja u svojoj svesci, a zatim ih podijeli sa svojim školskim drugovima.

- Razlikujem i mogu objasniti razliku između konveksnih i nekonveksnih mnogougaonika.
- Mogu ispravno klasificirati mnogougaonike na konveksne i nekonveksne.
- Mogu primijeniti znanja o konveksnim i nekonveksnim mnogougaoanicima u svakodnevnim zadacima i praktičnim primjerima.



Samostalni rad

1. Problem s izborom dizajna parka

Opis: Treba urediti novi park sa stazama i zelenim površinama. Park treba da ima različite 2D-oblike. Staza koja vodi do glavnog ulaza treba da ima konveksni oblik, dok staza koja vodi do unutrašnjih mjesta će imati nekonveksni oblik.

Pitanje: Kakve će biti razlike u estetici i funkciji ako koristiš konveksne i nekonveksne oblike za ove staze?

2. Problem s izborom ograde za baštu

Opis: Planiraj ogradu za svoju baštu. Za dio ograde ćeš koristiti pravougaone panele (konveksni mnogougao), dok za drugi dio bašte želiš koristiti ogradu u obliku nekonveksnog mnogougla.

Pitanje: Kakve praktične prednosti i nedostatke bi imala ova dva različita dizajna u smislu bezbjednosti i estetike tvoje ograde?

3. Problem s izgradnjom krova

Opis: Pri gradnji krova kuće, treba odlučiti da li koristiti konveksne ili nekonveksne oblike kako bi se stvorio zanimljiv dizajn.

Pitanje: Koji oblik će biti efikasniji za odvod kišnice i zašto?

4. Problem s uređenjem trotoara

Opis: Za izgradnju trotoara, treba da izabereš da li ćeš koristiti pločice u obliku konveksnih mnogouglova ili ćeš se odlučiti za oblik nekonveksnih mnogouglova koji će stvoriti zanimljiv vizuelni efekat.

Pitanje: Kakve će biti prednosti i nedostaci oba tipa dizajna u pogledu bezbjednosti i udobnosti pješaka?

Osnovni pojmovi o trouglovima

U ovoj lekciji rješavaćeš probleme primjenom osnovnih pojmova vezanih za trouglove, uključujući srednju liniju, ortocentar, težište, upisanu i opisanu kružnicu i zbir uglova u trouglu. Trougao je jedan od osnovnih geometrijskih oblika. Ima tri stranice i tri ugla, a postoje mnoga važna svojstva koja su povezana s njegovim karakteristikama.



Primjer 1

- Nacrtaj oštrogli i tupougli trougao.
- Objasni šta je visina trougla. Povuci i imenuj visine u svakom trouglu.
- U svakom od trouglova koje si nacrtao pod a) povuci težišne linije. Objasni šta je težišna linija trougla.
- Nacrtaj opisani i upisani krug kod jednog oštroglog i jednog tupouglog trougla.
- Na svakom trouglu izmjeri uglove i izračunaj njihov zbir.

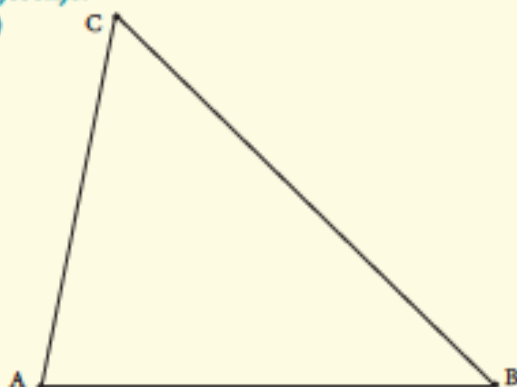
Primjer 2

U $\triangle ABC$, $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm.

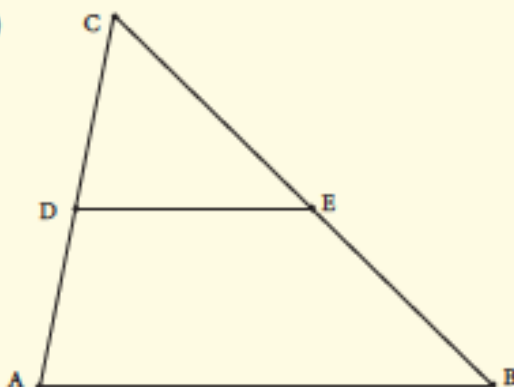
- Nacrtaj trougao u svesci i označi vrhove sa A, B i C.
- Označi sredinu stranice AC tačkom D, a sredinu stranice BC tačkom E. Poveži tačke D i E i izmjeri dužinu duži DE. Koji zaključak možeš donijeti o dužini duži DE?

Rješenje:

a)



b)



Ako si precizno crtao, dužina duži $\overline{DE} = 3$ cm. Ona je paralelna sa stranicom AB, s kojom nema zajedničku tačku, i iznosi polovinu dužine stranice AB u $\triangle ABC$.

Poveži središnje tačke stranica AB i AC, kao i stranica AB i BC. Šta možeš reći o dobijenim dužima? Kolika je njihova dužina?

Srednja linija je duž koja povezuje središnje tačke dviju stranica trougla.

Ona je paralelna sa stranicom s kojom nema zajedničkih tačaka i iznosi polovinu dužine te stranice.

U primjeru 1, ako srednju liniju DE označimo sa m , imamo $m = DE = \frac{AB}{2}, m \parallel AB$.

Zadatak 1

U $\triangle DEF$, stranica $\overline{DE} = 10$ cm, $\overline{EF} = 12$ cm, $\overline{DF} = 14$ cm.

- Nacrtaj $\triangle DEF$ i njegove srednje linije.
- Kolika je dužina svake srednje linije?
- Na koliko trouglova srednje linije dijele $\triangle DEF$?
- Nacrtaj ponovo trougao i odredi težište (T) trougla. Na svakoj težišnoj liniji izmjeri rastojanje od temena do težišta i od težišta do srednje tačke stranice koja leži naspram tog temena. U kakvom odnosu težište dijeli svaku težišnu liniju?
- Kako ćeš provjeriti da li si bio precizan u crtanju? Koliki je zbir unutrašnjih uglova u trouglu? Koliki zbir si dobio ti?

Primjer 3

Aleksandra želi da napravi drveni ukrasni ram u obliku trougla kako bi ga postavila oko kružnog cvjetnog aranžmana. Ona mora da odredi nekoliko važnih tačaka kako bi konstrukcija bila stabilna.

- Gdje treba Aleksandra da postavi ukrasnu traku koja će biti paralelna s jednom od stranica trougla i ima dužinu polovinu od nje?
- Kako može da postavi trougao oko kružnog cvjetnog aranžmana?
- Koju tačku trougla treba da odredi kako bi balansirala ram u jednoj tački?
- Kako može da napravi ukras u obliku kruga koji prolazi kroz sva tri temena trougla?
- Aleksandra želi da izračuna uglove svog trougla kako bi bila sigurna da će konstrukcija biti pravilna. Koliki treba da bude zbir tri unutrašnja ugla trougla?

Rješenje:

Da bi joj pomogao, nacrtaj prema datim uputstvima:

- Traka treba da bude postavljena duž srednje linije trougla paralelno s njegovom osnovom.
- Da bi postavila trougao oko kružnog cvjetnog aranžmana, Aleksandra treba da odredi centar upisane kružnice trougla.
- Da bi balansirala ram u jednoj tački, Aleksandra treba da odredi težište trougla. Kako ćeš naći težište trougla?
- Da bi napravila ukras u obliku kruga koji prolazi kroz sva tri temena trougla, Aleksandra treba da odredi centar opisane kružnice trougla.
- Ako je zbir uglova trougla 180° , tada Aleksandra može biti sigurna da će konstrukcija biti pravilna.

**Zadatak 2**

Ilir želi izgraditi platformu u obliku trougla koja će biti stabilna. U tu svrhu, treba da odredi nekoliko ključnih tačaka u trouglu kako bi postavio potporne stubove i kablove.

- Da bi platforma bila stabilna, Ilir treba da pronade tačku u trouglu gdje će moći postaviti centralni oslonac koji ravnomjerno raspoređuje sile. Koja tačka u trouglu predstavlja ovu stabilnu potporu i kako je može pronaći?
- Kablovi na platformi treba da budu pričvršćeni tako da budu jednako udaljeni od sve tri potporne tačke platforme. Koju tačku na trouglu treba da pronade Ilir kako bi pričvrstio kablove, tako da rastojanje do sva tri temena platforme bude jednako?
- Da bi ojačao platformu, Ilir želi postaviti gredu koja će povezati sredine dviju stranica trougla. Kako može da pronade ovu dužinu?

Ako imaš tri štapa dužine 5 cm, 7 cm i 12 cm, možeš li sastaviti trougao od njih? Objasni kako ti pomaže pravilo o dužinama stranica trougla da to odrediš.

Nacrtaj trougao u svojoj svesci.



Oboji svaki ugao trougla prema tvom osjećaju sigurnosti za svaki kriterij.

Zeleno – U potpunosti razumijem i mogu primijeniti.

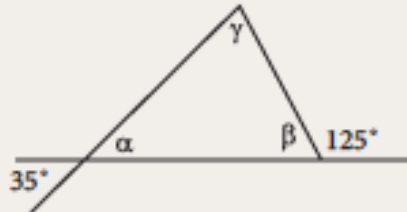
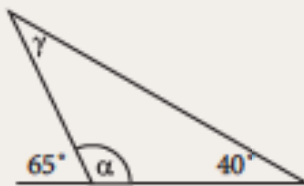
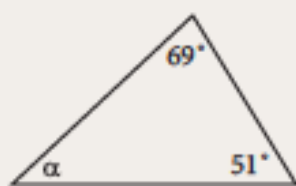
Žuto – Djelimično razumijem, ali mi treba dodatna vježba.

Crveno – Osjećam se nesigurno i treba mi objašnjenje.

Ako je neki ugao žut ili crven, napiši pitanje koje bi želio/željela da ti se razjasni.

Samostalni rad

1. Ako u $\triangle ABC$, $\sphericalangle A = 45^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, kolika je veličina ugla C ?
2. Objasni vezu između veličine uglova i stranica u trouglu kojem su sva tri unutrašnja ugla po 60° . Kakve su stranice trougla po dužini?
3. U $\triangle ABC$, ako je unutrašnji ugao kod temena B 60° , a kod temena C 50° , izračunaj spoljašnji ugao trougla u temenu A .
4. Datan je trougao s unutrašnjim uglovima $\sphericalangle A = 40^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, i $\sphericalangle C = 80^\circ$. Ako $\sphericalangle A$ ostane 40° , ugao ____ se poveća za 10° , a sva tri ugla i dalje formiraju trougao, koliko stepeni treba da iznosi novi ugao kod temena B ?
5. U pravouglom trouglu sa stranicama 3 cm, 4 cm i 5 cm, koliki je ugao između stranica od 3 cm i 4 cm?
6. Odredi označene nepoznate uglove na crtežima:



7. U trouglu ABC dato je da je ugao B za 15° manji od ugla A, a ugao C je za 30° veći od ugla B. Nadi sva tri ugla u trouglu.
8. U trouglu ABC ugao B je tri puta manji od ugla A, a ugao C je dva puta veći od ugla B. Nadi sva tri ugla u trouglu.
9. U trouglu ABC stranica $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{AC} = 10$ cm.
 - a) U zavisnosti od veličine stranica, odredi kojoj vrsti pripada trougao i odredi koji ugao će biti najveći, a koji najmanji u trouglu.
 - b) Izračunaj dužinu svake srednje linije trougla.
10. Za trougao ABC dužine srednjih linija su 3 cm, 5 cm i 6 cm. Kolike su stranice trougla ABC?
11. a) Nacrtaj jednakokranični trougao.
b) Odredi ortocentar trougla.
12. Nacrtaj pravougli trougao s katetama 8 cm i 6 cm.
 - a) Izmeri dužinu hipotenuze.
 - b) Nacrtaj upisanu kružnicu trougla.
 - c) Nacrtaj opisanu kružnicu trougla.

Konstrukcija trouglova

U ovoj lekciji naučit ćeš kako konstruisati trouglove u različitim situacijama, koristeći date informacije: tri stranice, dvije stranice i ugao između njih, kao i stranicu i dva ugla koji leže na toj stranici. Trougao je geometrijski oblik s tri stranice i tri ugla. Konstruiranje trouglova može se vršiti raznim kombinacijama datih informacija, kao što su stranice i uglovi.



Primjer 1

Izradi zastavicu za sportska takmičenja. Zastavica treba da bude u obliku pravouglog trougla s katetom od 8 cm i uglom od 60° između katete i hipotenuze. Za tu svrhu koristi list papira, lenjir, aglomjer, geometrijski trokut, šestar i olovku.

Rješenje:

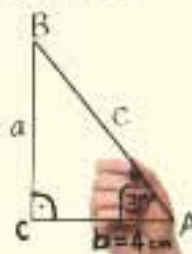
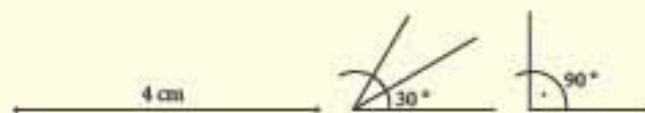
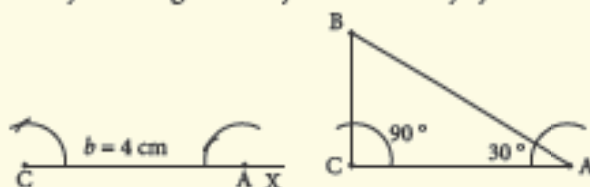
Prvo crtaš zadate elemente uz pomoć lenjira. Uglove od 60° i 90° možemo konstruisati šestarom (uglovi koje ne možeš konstruisati crtaju se uglomjerom). Zatim slobodnom rukom napravi skicu trougla koji treba da konstruiraš, označavajući njegove elemente. Slijedi analiza skice i njena primjena u koracima konstrukcije.

Slijedi korake i crtaj u svojoj svesci.

Koraci za konstrukciju:

- Nacrtaj polupravu CX i prenesi duž od 8 cm šestarom počevši od tačke C.
- Krajnju tačku te duži označi slovom A.
- Prenesi uglove od 30° i 90° u tjemenu A i C.
- Povuci krake prenesenih uglova.
- Presjek drugog kraka ugla od 30° i drugog kraka pravog ugla označi slovom B.

Dobijeni trougao ABC je zastavica koju je trebalo da izradiš.



skica

Primjer 2

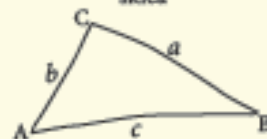
Konstruiraj trougao sa stranicama $a = 35$ mm, $b = 25$ mm, $c = 32$ mm.

Rješenje:

- Nacrtaj zadane elemente trougla lenjirom.
- Napravi skicu trougla i označi elemente (tjemena, stranice i uglove).
- Iz analize skice dolazi se do koraka za konstrukcija.

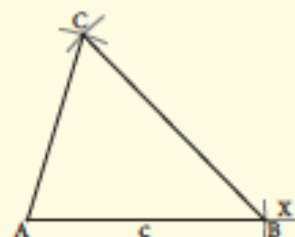
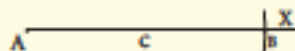
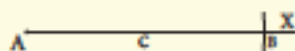
dati elementi
a
b
c

skica



Koraci za konstrukciju trougla kada su data tri stranice (CCC):

- Nacrtaj polupravu AX i šestarom prenesi dužinu stranice c .
- Presjek kružnog luka sa polupravom AX označi slovom B .
- Šestarom uzmi dužinu b i postavi vrh šestara u tačku A (odnosno, nacrtaj kružni luk sa centrom u A i radijusom b).
- Zatim otvori šestar koliko je dužina a i postavi vrh šestara u tačku B (nacrtaj kružni luk sa centrom u B i radijusom a).
- Presjek dva kružna luka koje ćeš napraviti biće tačka C . Ako ima dvije presječne tačke, izaberi jednu (zavisno od uslova u zadatku).
- Lenjirom spoji tačke A i C , B i C .
- $\triangle ABC$ je konstruisan.



Zadatak 1

Konstruiraj trougao sa stranicama od 5 cm, 7 cm i 9 cm. Provjeri jesu li sve stranice jednake sa datim dužinama.

Primjer 3

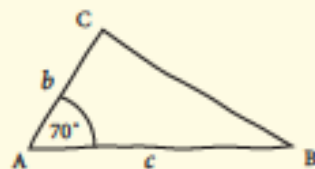
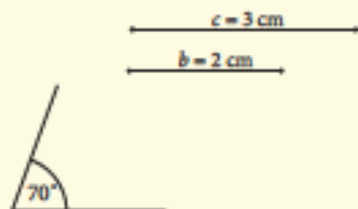
Data su dvije stranice $b = 2$ cm i $c = 3$ cm, a ugao između njih je $\gamma = 70^\circ$. Koristi lenjir i šestar da konstruišaš trougao.

Rješenje:

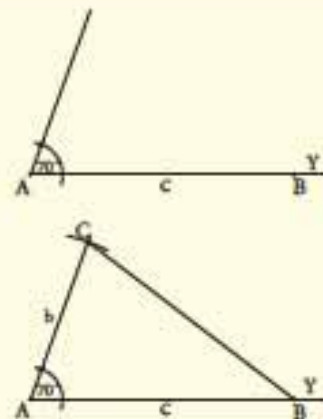
- Nacrtaj date elemente trougla, dvije stranice i ugao između njih, lenjirom i uglomjerom.
- Napravi skicu trougla i označi elemente (temena, stranice i uglove).
- Iz analize skice dolazi se do koraka za konstrukciju.

Koraci za konstrukciju trougla kada su date dvije stranice i ugao između njih (CAC):

- Nacrtaj polupravu AY .
- Otvori šestar koliko je duž $c = \overline{AB}$, odnosno jedna stranica trougla (nacrtaj kružni luk sa centrom u A i radijusom $c = \overline{AB}$).



- Presjek kružnog luka sa polupravom označi ga sa B, tj. ga sa B, tj. $k(A, \overline{AB}) \cap AY = \{B\}$.
- Prenesi ugao od 70° šestarom u teme A.
- Povuci drugi krak ugla od 70° lenjirom.
- Na drugom kraku ugla od 70° napravi luk šestarom koji otvaraš koliko je stranica $b = \overline{AC}$ počevši od tačke A (kružni luk sa centrom u A i radijusom $b = \overline{AC}$).
- Presjek drugog kraka ugla sa lukom označi ga sa C.
- Poveži tačke B i C.
- $\triangle ABC$ je konstruisan.

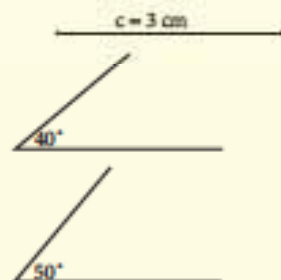
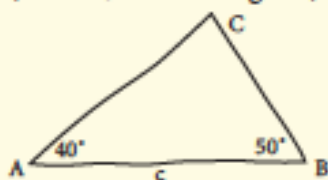


Primjer 4

Konstruiraj trougao ako je data jedna njegova stranica $c = 3 \text{ cm}$ i dva ugla: $\alpha = 40^\circ$ i $\beta = 50^\circ$ koji leže na toj stranici trougla.

Rješenje:

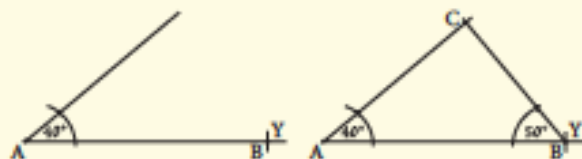
- Nacrtaj date elemente trougla, stranicu i dva ugla, lenjirom i uglomjerom.
- Napravi skicu trougla i označi elemente (temena, stranice i uglove).



- Iz analize skice dolazi se do koraka za konstrukciju.

Koraci za konstrukciju trougla kada su dati jedna stranica i dva ugla na stranici (ACA):

- Nacrtaj polupravu AY .
- Prenesi dužinu $c = \overline{AB}$ i označi tačku B.
- Prenesi šestarom ugao od 40° sa temenom u tački A.
- Prenesi šestarom ugao od 50° sa temenom u tački B.
- Presjek dobijenih krakova uglova od 40° i 50° označi ga sa C.
- $\triangle ABC$ je konstruisan.



Zadatak 2

Konstruiraj trougao za koji je dato:

- a) $\overline{MN} = 7 \text{ cm}$, $\angle NMP = 65^\circ$, $\angle MNP = 70^\circ$ b) $\overline{KL} = 7 \text{ cm}$, $\overline{KQ} = 6 \text{ cm}$, $\overline{LQ} = 5 \text{ cm}$
 c) $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$, $\angle ABC = 45^\circ$

Primjer 5

Radnik na gradilištu pri izradi krova treba da konstruira trougao za koji su dati dužina stranice 9 m i dva ugla koji leže na toj stranici od 45° i 65° .

Uputstvo za rješavanje: U tvojoj svesci umjesto metara koristi cm i korake za konstrukciju date u četvrtom primjeru (ACA). Provjeri da li u konstruisanom trouglu zbir uglova iznosi 180°

Zadatak 3

Pri geodetskom mjerenju treba da se konstruira terenska mapa gdje jedan trougao ima sljedeće elemente: jedna stranica $\overline{AB}$ je konstruisan = 8 m, druga stranica $\overline{AC}$ je konstruisan = 7 m i ugao između njih $\angle CAB$ je konstruisan = 50° . Koristeći razmjerni, konstruiraj trougao i izmjeri dužinu stranice naspram ugla od 50° . Kolika je njena dužina u prirodnoj veličini?

Kada si konstruisao/la trouglove u ovoj lekciji, koji su ti koraci bili najlakši, a koji najizazovniji? Šta bi promijenio/la u svom pristupu da budeš brži/a i precizniji/a u budućnosti u zadacima u kojima se traži konstrukcija trougla?

Odgovori u svojoj svesci. Za konstrukciju trougla za koju nisi siguran/na, ponovo pogledaj primjer iz lekcije.

- Zapiši svoja razmišljanja o konstrukciji trouglova.
- Da li si uspio/la da primijeniš pravila i pojmove u praktičnim zadacima?
- Da li razumiješ razliku između različitih načina konstrukcije?

Samostalni rad

1. Konstruiraj jednakokrani trougao sa stranicom 5 cm.
2. Konstruiraj pravougli trougao sa hipotenuzom 6 cm i uglom od 45° .
3. Konstruiraj jednakokrani trougao sa osnovom 7 cm i uglom pri osnovi 55° .
4. Konstruiraj jednakokrani trougao sa krakom 8 cm i uglom između krakova od 75° .
5. Konstruiraj jednakokrani pravougli trougao sa krakom 4 cm.

Konstrukcija opisane i upisane kružnice trougla

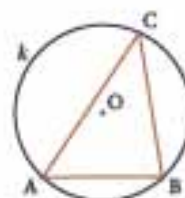
U ovoj lekciji naučićeš kako da konstruišeš centre opisane i upisane kružnice u trouglu, kao i važnost ovih tačaka u geometrijskim konstrukcijama.

Centri upisane i opisane kružnice su važne tačke u trouglu. Ovi centri su važni jer se njihovom pomoću može konstruisati kružnica koja dodiruje stranice trougla (upisana) ili prolazi kroz sva temena trougla (opisana). One su ključne u različitim geometrijskim zadacima, kao i u dizajnu i inženjerstvu.



Primjer 1

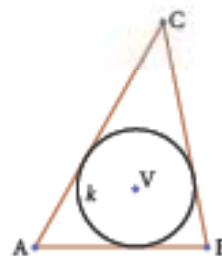
Nacrtaj opisanu kružnicu trougla sa stranicama 5 cm, 6 cm i 7 cm. Objasni šta je opisana kružnica trougla. Ako si crtao precizno, kružnica će prolaziti kroz temena trougla.



Primjer 2

Nacrtaj upisanu kružnicu trougla sa stranicama 6 cm, 8 cm i 9 cm. Objasni šta je upisana kružnica trougla. Ako si crtao precizno, kružnica će dodirivati tri stranice trougla. Šta predstavlja svaka stranica trougla za kružnicu?

Da bi pronašao centre opisane i upisane kružnice trougla, u primjerima iznad koristio si lenjir i uglojmjer.



Primjer 3

Konstruiraj centar opisane kružnice trougla sa stranicama 6 cm, 5 cm i 4 cm.

Kada kažemo „konstruisati“, mislimo na korištenje samo šestara i ravnala.

Rješenje:

Za ovu konstrukciju možeš se podsjetiti na konstrukciju trougla kada su date tri stranice (CCC) i na konstrukciju simetrale duži. Da bi konstruirao centar opisane kružnice, slijedi korake i crtaj u svojoj svesci:

- Konstruiraj $\triangle ABC$ sa datim trima stranicama (CCC). Konstruiraj simetralu stranice AB trougla $\triangle ABC$.
- Konstruiraj simetralu stranice BC.
- Konstruiraj simetralu stranice CA (ova simetrala se može i ne konstruirati, zašto?)

- Presjek simetrala stranica trougla $\triangle ABC$ označi slovom O.
- Vrh šestara postavi u tačku O.

Otvori šestar do bilo kojeg temena trougla i opiši kružnicu.



Primjer 4

Konstruiraj centar upisane kružnice trougla sa stranicama 6 cm, 8 cm i uglom od 70° .

Rješenje:

Za ovu konstrukciju možeš se prvo podsjetiti na konstrukciju trougla kada su date dvije stranice i ugao između njih, i na konstrukciju simetrale ugla.

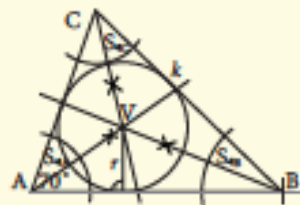
Da bi konstruirao centar upisane kružnice, slijedi korake i crtaj u svojoj svesci:

- Konstruiraj trougao sa datim dvjema stranicama i uglom između njih (CAC).
- Konstruiraj simetralu $\sphericalangle A$ trougla $\triangle ABC$.
- Konstruiraj simetralu $\sphericalangle B$ trougla $\triangle ABC$.
- Konstruiraj simetralu $\sphericalangle C$ trougla $\triangle ABC$ (može se i ne konstruirati, dovoljne su dvije).
- Presjek simetrala uglova trougla označi slovom V.
- Vrh šestara postavi u tačku V.

Otvori šestar koliko je rastojanje do bilo koje stranice trougla (na crtežu označeno sa r) i nacrtaj kružnicu.

U primjeru 3 i primjeru 4, da bi konstruisao opisanu i upisanu kružnicu trougla, koristio si lenjir i šestar.

Koji je način određivanja centra opisane i upisane kružnice trougla precizniji – sa lenjirom i uglomjerom ili sa lenjirom i šestarom?



Zadatak 1

Konstruiraj upisanu i opisanu kružnicu trougla sa stranicom 5 cm i uglovima na toj stranici od 30° i 70° .

Primjer 5

U jednom parku planira se postaviti fontana u obliku kružnice tako da dodiruje svaku od tri staze koje formiraju trougao. Zatim treba postaviti cvjetni dio u obliku kružnice opisane oko tog trougla.

Rješenje:

- Napravi skicu prema podacima iz primjera 5.
 - Nacrtaj trougao formiran od staza u parku.
 - Konstruiraj upisanu kružnicu trougla kako bi odredio položaj fontane.
 - Konstruiraj opisanu kružnicu trougla kako bi planirao cvjetni dio oko trougla.
- Ovo će osigurati estetsko postavljanje fontane i cvjetnog dijela u odnosu na staze u parku.

Zadatak 2

Na jednom gradskom trgu u obliku trougla treba postaviti svjetiljke:

- Jedna glavna svjetiljka u centru trga za ravnomjerno osvjetljenje (jednako udaljena od tri stranice trougla).
- Dekorativne svjetiljke u kružnoj liniji oko trga da bi se osvijetlila cijela površina.

Kako bi odredio:

- Tačnu lokaciju glavne svjetiljke?
- Poluprečnik i centar kružnice za postavljanje dekorativnih svjetiljki?

Nabroji primjere gdje se može primijeniti konstrukcija upisane i opisane kružnice trougla? Objasni važnost preciznosti pri konstrukciji u tim situacijama.



Piši u svoju svesku. Svoje odgovore podijeli sa svojim školskim drugovima.

- Napiši kratku refleksiju o tome šta si naučio/la o konstrukciji centara opisane i upisane kružnice.
- Da li si uspio/la pravilno primijeniti pojmove?
- Kakve zadatke iz svakodnevnog života možeš rješavati ovim tehnikama?

Samostalni rad

Zadaci za konstrukciju upisane i opisane kružnice trougla:

1. Nacrtaj kružnu ogradu oko trougaonog prostora (7 m, 5 m i 8 m).
2. Dizajniraj okruglu cvjetnu baštu oko fontane u obliku jednakokrakog trougla (krak 7 m i ugao između krakova 80°).
3. Nacrtaj mjesto za spomenik na prostoru u obliku trougla (jedna stranica 4 m i uglovi na toj stranici 45° i 45°), a zatim konstruiraj kružnicu oko trougla koja će se koristiti za dodatne dekorativne elemente.
4. Konstruiraj upisanu i opisanu kružnicu jednakostraničnog trougla sa stranicom 5,5 cm.
5. Simeon je na svojoj njivi izabrao tri tačke na kojima će se postaviti prskalice za navodnjavanje. Pomozi mu da pronade lokaciju centralne tačke za postavljanje mjesta za dovod vode koja će biti jednako udaljena od sve tri prskalice za navodnjavanje.
6. (Zadatak uz korištenje obrazovnog softvera): Treba da izradiš projekat za dizajn novog parka u svom gradu. Park treba da ima geometrijske elemente kao što su staze, drvored, cvjetnjaci, česme, klupe, fontane, svjetiljke koje formiraju trouglove i kružnice. Tvoj zadatak je da koristiš obrazovni softver da nacrtáš ove oblike. Pri tome ćeš trebati i da nalaziš tačke dodira između trouglova i kružnica da bi obezbijedio/la pravilna rastojanja i proporcije date u projektu, neke karakteristične tačke u trouglovima odgovarajuće cilju koja treba da obezbijedi stabilnost i raznovrsno i pravilno uređenje prostora. Koristi različite alate iz obrazovnog softvera kojima ćeš prikazati što je moguće više geometrijskih pojmova kao što su konstrukcija, odsječak, ugao, simetrala, ortocentar, težište, mjerenje, upisana, opisana kružnica i sl.

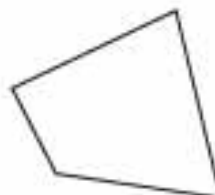
Četvorouglovi i klasifikacija prema paralelnosti stranica

Četvorouglovi su mnogouglovi koji imaju četiri stranice, četiri unutrašnja (vanjska) ugla i četiri temena. Oni se mogu klasifikovati prema različitim karakteristikama, kao što su: dužina stranica, veličina uglova ili paralelnost stranica. U ovoj lekciji ćeš se fokusirati na klasifikaciju četvorouglova prema paralelnosti njihovih suprotnih stranica. Naučićeš kako da prepoznaš različite vrste četvorouglova, kao što su pravougaonici, rombovi, paralelogrami, trapezi i kvadrati. Ovo znanje ne samo što će ti pomoći u geometriji, nego ćeš ga koristiti i u svakodnevnim situacijama, na primjer, pri izboru oblika u arhitekturi ili dizajnu.



Primjer 1

Aleksandra i njeni prijatelji odlučili su da naprave ukras za školski događaj. Oni su isjekli papir u obliku kao na crtežu. Dok su ukrašavali formu koju su isjekli od papira, podsjetili su se na neke važne geometrijske pojmove. Podsjeti se i ti, odgovarajući na sljedeća pitanja:

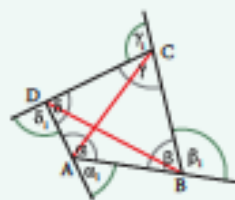


- Kakvu 2D-formu su isjekli Aleksandra i njeni prijatelji? Objasni zašto.
- Da li je četvorougao konveksan ili nekonveksan mnogougao?
- Koliko temena, stranica i uglova ima četvorougao?
- Koje stranice četvorougla su susjedne, a koje suprotne?
- Koja temena četvorougla su susjedna, a koja suprotna?
- Koji uglovi četvorougla su susjedni, a koji suprotni?
- Koji uglovi četvorougla su unutrašnji, a koji spoljašnji?
- Kako možeš da nađeš spoljašnji ugao četvorougla?
- Povuci dijagonale četvorougla. Kakve trouglove dobijaš sa svakom dijagonalom?

Mnogougao koji ima četiri stranice (četiri temena, uglove) zovemo četvorougao.

Rješenje:

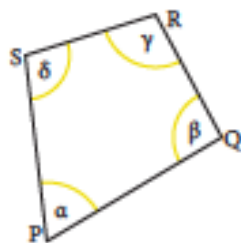
Napravi crtež u svojoj svesci kao dati crtež i koristi ga da odgovoriš na pitanja.



Zadatak 1

Za četvorougao PQRS sa crteža, zapiši:

- Susjedna i suprotna temena
- Susjedne i suprotne stranice
- Susjedne i suprotne uglove
- Koliko parova suprotnih stranica ima svaki četvorougao?

**Primjer 2**

Ana i Bojan su se igrali u parku i primijetili različite forme pločica na stazi. Ana je primijetila da neke od pločica izgledaju kao da imaju paralelne stranice, a druge ne. Oni su odlučili da nacrtaju formu nekoliko pločica i da zatraže pomoć od nastavnice kako bi saznali više o njima. Nastavnica im je dala tri pitanja da kategoriziraju pločice prema paralelnosti stranica:

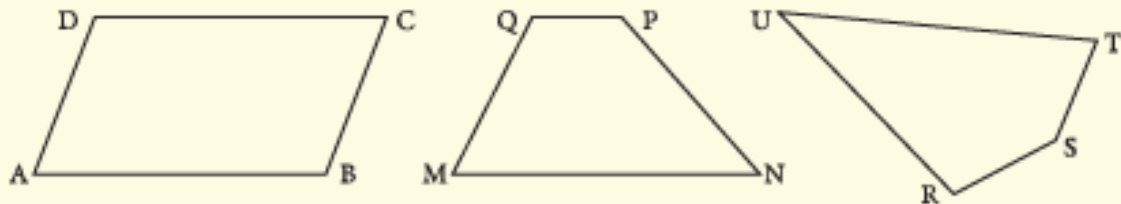


Prvo pitanje: Pločica kod Ane ima dva para paralelnih suprotnih stranica. Kakav vid četvorougla je ova pločica?

Drugo pitanje: Bojan je nacrtao pločicu sa samo jednim parom paralelnih suprotnih stranica, dok druge dvije stranice nisu paralelne. Kakav vid četvorougla je ovo?

Treće pitanje: Na kraju, oni su nacrtali pločicu koja nema nijedan par paralelnih suprotnih stranica. Kakav vid četvorougla je ova forma?

Nacrtaj tri različita četvorougla koja odgovaraju opisima iz pitanja. Označi temena i provjeri jesu li stranice paralelne, a ako je odgovor potvrđan, odgovori koliko parova paralelnih stranica imaju. Objasni u koju kategoriju spada svaki četvorougao prema paralelnosti stranica.

Rješenje:

Prvi četvorougao (kod Ane) pripada kategoriji četvorouglova koji imaju dva para paralelnih suprotnih stranica.

Drugi četvorougao (kod Bojana) pripada kategoriji četvorouglova koji imaju samo jedan par paralelnih suprotnih stranica.

Treći četvorougao pripada kategoriji četvorouglova koji nemaju nijedan par paralelnih suprotnih stranica.

Prema paralelnosti stranica, četvorouglove možemo klasifikovati u tri kategorije:

- Četvorougao u kojem su po dvije suprotne stranice paralelne zove se paralelogram.
- Četvorougao koji ima samo jedan par paralelnih stranica zove se trapez.
- Četvorougao koji nema nijedan par paralelnih stranica zove se trapezoid.

Trapezoid u kojem su po dvije susjedne stranice jednake naziva se deltoid.



Ravnokraki trapez je trapez u kojem neparalelne stranice imaju jednake dužine.

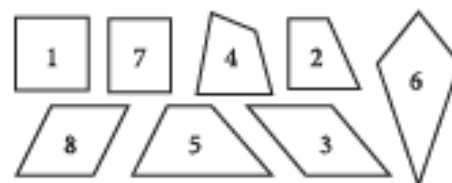


Zadatak 2

Na crtežu su data više četvorouglova.

a) Precrtaj tabelu u svojoj svesku i popuni je.

Četvorouglovi	Broj kojim je označen četvorougao
Paralelogram	
Trapez	
Trapezoid	



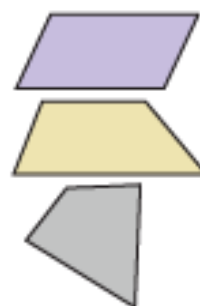
b) Koji od četvorouglova je deltoid? Objasni zašto.

Primjer 3

Lokalna zajednica organizuje akciju čišćenja parka.

Volonteri su primijetili da su neke od pločica sa starog igrališta oštećene i treba ih zamijeniti. Nove pločice koje treba naručiti su u obliku četvorougla, ali dobavljač nudi različite vrste četvorouglova. Da bi olakšao posao, koordinator akcije zamolio je jednog volontera da klasifikuje pločice prema paralelnosti stranica:

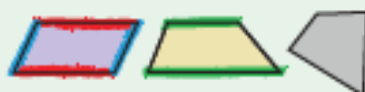
Četvorougao u kojem su po dvije susjedne stranice jednake zove se deltoid. Ravnomjerni trapez je trapez u kojem neparalelne stranice imaju jednake dužine.



- Jedna od starijih pločica ima dva para paralelnih suprotnih stranica. Kakav vid četvorougla je ova pločica?
- Jedna od novih pločica ima samo jedan par paralelnih stranica. Kakav vid četvorougla je ova pločica?
- Neki ostaci od starih pločica nemaju paralelne stranice. Kakav vid četvorougla su ove pločice?
- Nacrtaj po jedan četvorougao iz svake kategorije (sa dva para paralelnih stranica, sa jednim parom paralelnih stranica i bez paralelnih stranica). U svakom crtežu označi stranice koje su paralelne.

Rješenje:

- Pločica sa dva para paralelnih stranica je paralelogram.
- Pločica sa jednim parom paralelnih stranica je trapez.
- Pločica bez paralelnih stranica je trapezoid.
- Parovi paralelnih stranica su obojeni plavom, crvenom ili zelenom bojom.

**Zadatak 3**

Ana želi urediti baštu u svom dvorištu. Ona planira posaditi cvijeće i povrće u različitim oblicima parcela koje imaju četvorouglastu formu. Evo plana koji je napravila:

- Kakav četvorougao je svaka parcela u planu koji je napravila Ana?
- Kako može najlakše izmjeriti stranice i odrediti da li su paralelne ili ne?
- Ana želi napraviti stazu u svakoj od parcela koja povezuje suprotna temena parcele. Kako se može uvjeriti da će staza podijeliti svaku parcelu na dva trougla? Objasni svoj odgovor.



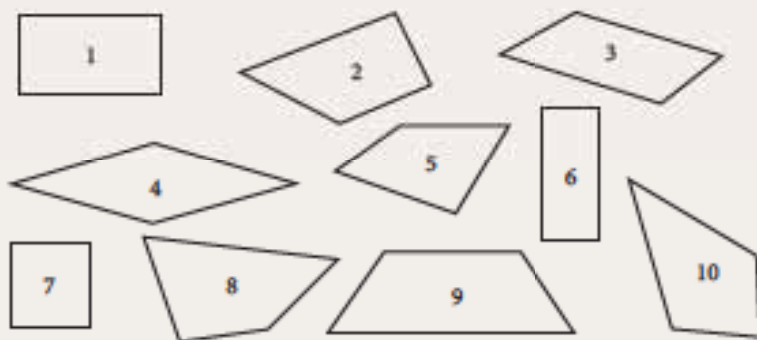
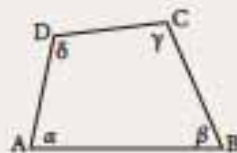
Izradi misaonu mapu za pojam četvorougao u koju ćeš uključiti sve do sada obrađene koncepte u vezi s tim pojmom.

Odgovori na pitanja u svoju svesku

- Da li tačno klasifikujem četvorouglove prema paralelnosti stranica?
 - Da li pravilno koristim pojmove za različite vrste četvorouglova (paralelogram, trapez, trapezoid)?
 - Kako bih ocijenio svoje razumijevanje četvorouglova? (Od 1 do 5, gdje je 1 potpuno nerazumijevanje, a 5 potpuno razumijevanje).
- Za one pojmove u koje nisi siguran, ponovo se vrati na lekciju.

Samostalni rad

1. Koji su osnovni elementi četvorougla?
2. U vezi sa četvorouglo α ABCD zapiši:
 - a) dva susjedna temena
 - b) dvije susjedne stranice
 - c) dva suprotna ugla
3. Šta je tačno?
 - a) Svaki četvorougao ima samo jedan par suprotnih temena.
 - b) Svaki četvorougao ima samo dva para susjednih stranica.
 - c) Svaki četvorougao ima dvije dijagonale.
4. Klasifikuj četvorouglove sa crteža prema paralelnosti stranica.

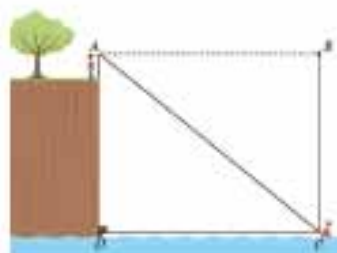


5. Nacrtaj dvije paralelne prave m i n , a zatim ih presijeci sa druge dvije paralelne prave l i k . Presječne tačke pravih označi slovima.
 - a) Kakav četvorougao si dobio?
 - b) Imenij unutrašnje i spoljašnje uglove tog četvorougla.
 - c) Koliki je svaki unutrašnji i odgovarajući spoljašnji ugao? Koristi uglomjer.
6. Nacrtaj četvorougao MNPQ i povuci njegove dijagonale. Objasni (zapiši) šta je dijagonala četvorougla.
7. Nacrtaj dvije paralelne prave m i n . Na pravoj m označi dvije tačke M i N, a na pravoj n tačku P. Zatim docrtaj jedan paralelogram i jedan trapez sa zajedničkim temenima M, N i P.

Zbir uglova u četvorouglu

Do sada si se susretao/la sa različitim četvorouglovima (paralelogram, trapez, trapezoid). Iako ovi četvorouglovi izgledaju različito, oni imaju jedno zajedničko svojstvo – zbir njihovih unutrašnjih uglova je uvijek isti!

U ovoj lekciji ćeš naučiti: Kako da izračunaš zbir uglova u svakom četvorouglu; Zašto svi četvorouglovi imaju isti zbir uglova, bez obzira na svoj oblik; Kako da koristiš ovo svojstvo za rješavanje zadataka i problema u geometriji.



Primjer 1

Arhitekta planira da izgradi trougli prozor sa uglovima od 65° i 75° . Kakav vid trougla je prozor?

Uputstvo za rješavanje: Odredi nepoznati ugao trougla da bi odgovorio na pitanje kojem tipu trougla pripada.

Zadatak 1

Trokut ABC ima ugao od $32^\circ 44'$, a drugi ugao je dva puta veći od datog ugla. Koliki je treći ugao trougla ABC?

Primjer 2

Izračunaj zbir uglova u četvorouglu MNPQ.

Rješenje:

Zbir uglova u četvorouglu je $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

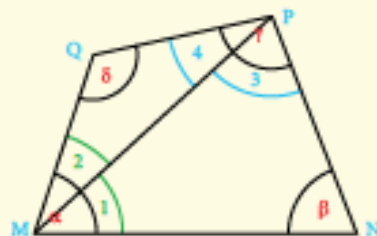
Povlačenjem dijagonale MP u četvorouglu MNPQ on se dijeli na dva trougla. Iz $\triangle MNP$ imamo $\sphericalangle 1 + \beta + \sphericalangle 3 = 180^\circ$, a iz $\triangle MPQ$ imamo $\sphericalangle 2 + \delta + \sphericalangle 4 = 180^\circ$

Ako ovim dvjema jednakostima saberemo posebno lijeve strane, a posebno desne strane, dobija se:

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \beta + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 + \delta = 2 \cdot 180^\circ.$$

Zamjenom $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = \alpha$ i $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = \gamma$

u gornjoj jednakosti dobija se: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.



U svakom četvorouglu zbir unutrašnjih uglova je jednak 360° ili jednom punom uglu.

Primjer 3

Nadi zbir spoljašnjih uglova četvorougla ABCD.

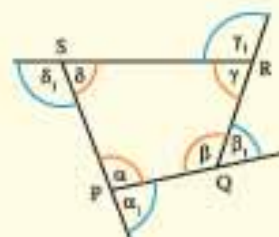
Rješenje:

Svaki unutrašnji sa odgovarajućim spoljašnjim uglom formira ravan ugao, odnosno:

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ; \quad \beta + \beta_1 = 180^\circ; \quad \gamma + \gamma_1 = 180^\circ; \quad \delta + \delta_1 = 180^\circ$$

Ako saberemo posebno lijeve, a posebno desne strane ovih jednakosti, dobija se: $(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1) = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

Budući da je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ (zbir unutrašnjih uglova), dobija se da je zbir spoljašnjih uglova $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$.



U svakom četvorouglu zbir spoljašnjih uglova je jednak 360° ili jednom punom uglu.

Drugim riječima, zbir unutrašnjih uglova i zbir spoljašnjih uglova u četvorouglu su jednaki i iznose 360° .

Zadatak 2

Tri od spoljašnjih uglova četvorougla su 72° , 141° i 55° . Odredi unutrašnje uglove četvorougla i četvrti spoljašnji ugao.

Primjer 4

Ti si jedan od članova školskog tima koji treba da uredi školsko dvorište koje ima oblik četvorougla. Tri unutrašnja ugla školskog dvorišta su 90° , 110° i 89° . Koliki je četvrti unutrašnji ugao? Odredi svaki spoljašnji ugao četvorougla.

Rješenje:

Budući da je zbir unutrašnjih uglova bilo kog četvorougla 360° , a zbir data tri ugla je:

$$90^\circ + 110^\circ + 89^\circ = 289^\circ, \text{ četvrti ugao je: } 360^\circ - 289^\circ = 71^\circ.$$

Unutrašnji ugao zajedno sa odgovarajućim spoljašnjim uglom formiraju ravan ugao, pa tako, na primjer, za spoljašnji ugao koji je odgovarajući uglu od 110° imamo $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. Nadi preostale spoljašnje uglove četvorougla.

Zadatak 3

U parku postoji žardinjera u obliku četvorougla sa uglovima 90° i 120° . Koliki je zbir druga dva ugla žardinjere?

Da li postoji četvorougao kod kojeg je zbir tri unutrašnja ugla jednak četvrtom unutrašnjem uglu?
Da li postoji četvorougao kod kojeg su sva četiri ugla oštri uglovi?

Odgovori na pitanja u svoju svesku. Za ono što ti je potrebno za poboljšanje razumijevanja, vrati se na lekciju.

1. Šta sam naučio/la o uglovima četvorougla?
2. Gdje imam teškoće u razumijevanju ili primjeni onoga što sam učio/la u ovoj lekciji?
3. Šta mogu da uradim da poboljšam svoje razumijevanje?

Samostalni rad

1. U četvorouglu ABCD, $\sphericalangle A$ je 75° , $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 210^\circ$. Koliko stepeni ima ugao $\sphericalangle D$?
2. U jednom četvorouglu tri od spoljašnjih uglova su: 120° , 80° i 100° . Odredi četvrti spoljašnji ugao.
3. U jednom četvorouglu dva unutrašnja ugla su 120° i 65° . Jedan spoljašnji ugao je 70° . Odredi druga dva unutrašnja ugla.
4. Da li postoji četvorougao u kojem su svi unutrašnji ugli veći od 90° ? Objasni odgovor.
5. Pri mjerenju uglova u jednom četvorouglu dobijeno je: $\alpha = 75^\circ 20'$, $\beta = 130^\circ 10'$ i $\delta = 160^\circ$. Da li je pri mjerenju napravljena greška? Objasni odgovor.
6. U jednom četvorouglu dva ugla su jednaka međusobno. Druga dva ugla su 70° i 120° . Odredi veličinu nepoznatih uglova.
7. U jednom četvorouglu jedan od uglova je 40° , drugi je za 13° veći, a treći je dva puta veći od zbira prva dva. Odredi uglove četvorougla.
8. Jedna od dijagonala parcele u obliku četvorougla dijeli parcelu na jednakostraničan i jednakokraki pravougli trougao. Odredi unutrašnje uglove parcele.
9. Dva susjedna ugla četvorougla su 98° i 108° . Odredi ugao između simetrala tih uglova.

Paralelogram i svojstva paralelograma

U prethodnoj lekciji upoznao/la si se sa jednom važnom vrstom četvorougla – paralelogramom. Paralelogram je četvorougao u kojem su suprotne stranice paralelne i jednake. Ova vrsta četvorougla ima zanimljiva svojstva koja ćemo istraživati zajedno. Nakon što razumiješ svojstva paralelograma, bićeš u mogućnosti da ih primjenjuješ u rješavanju različitih zadataka i da ih koristiš u geometrijskim problemima.



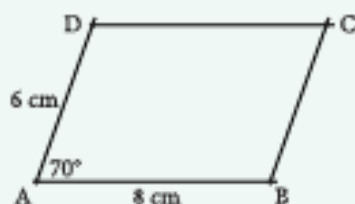
Primjer 1

Jedna od staza u parku ima oblik paralelograma. Dužina jedne stranice staze je 12 metara, a susjedne stranice 8 metara. Oštri ugao koji zahvataju stranice je 70° . Nacrtaj stazu koristeći razmjer. Koje su karakteristike paralelograma koje ćeš koristiti da je nacrtáš?

Rješenje:

Crtanje paralelograma – paralelogram treba da ima dva para suprotnih stranica koje su paralelne. U koracima:

1. Crtamo dvije stranice sa datim dužinama koje zahvataju ugao od 70° i označena temena A, B, D.
2. Povlačimo iz tačke B paralelnu polupravu sa AD.
3. Povlačimo iz tačke D paralelnu polupravu sa AB.
4. U presjeku dviju poluprava označavamo tačku C kao četvrto teme paralelograma.

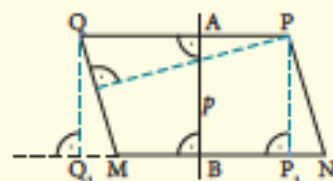


Primjer 2

Nacrtaj visinu paralelograma.

Rješenje:

U paralelogramu MNPQ nacrtana je prava p normalna na suprotne stranice MN i PQ. Duž AB od normale p na te stranice naziva se visina paralelograma. Visine su i duži QQ_1 i PP_1 koji su jednaki visini, odnosno rastojanje između paralelnih stranica je svuda jednako.



Druga visina paralelograma je rastojanje između drugog para paralelnih stranica MQ i PN (kao na primjer normala povučena iz temena P prema stranici QM).

Visina paralelograma je normala spuštена iz jednog temena paralelograma do suprotne stranice. Dužina ove duži jednaka je rastojanju između paralelnih stranica.

Zadatak 1

Koliko visina iz jednog temena mogu da se povuku kod paralelograma? Nacrtaj proizvoljan paralelogram. Povuci visine iz jednog temena.

Budući da je paralelogram četvorougao, zbir unutrašnjih uglova, kao i zbir spoljašnjih uglova je 360° .

Primjer 3

Nacrtaj više različitih paralelograma. U svakom od njih povuci jednu od dijagonala (manju ili veću). Isijeci paralelograme. Zatim svaki paralelogram presijeci po dijagonali koju si povukao.

- Kakvi su trouglovi koji se dobijaju kada se paralelogram presiječe po jednoj dijagonali?
- Kakve su suprotne stranice paralelograma?
- Kakvi su suprotni uglovi paralelograma?
- Kakvi su susjedni uglovi paralelograma?

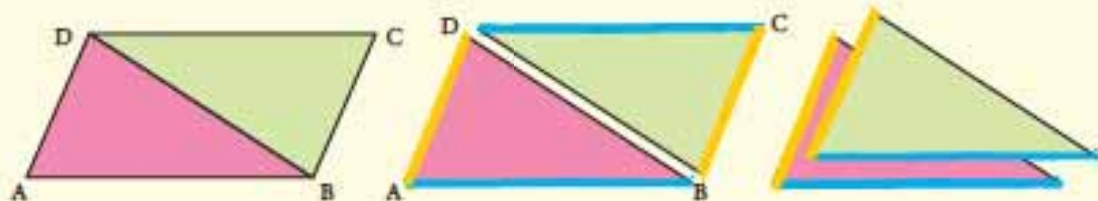
Rješenje:

- Kada se paralelogram presiječe po jednoj dijagonali, dobijaju se dva trougla iste forme i veličine.

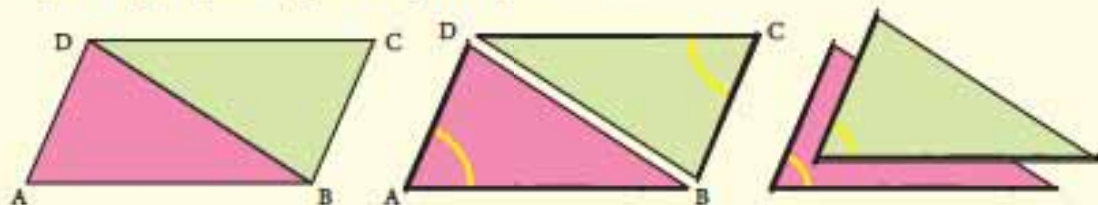


Svaka dijagonala dijeli paralelogram na dva trougla iste forme i veličine.

b) Suprotne stranice paralelograma su jednake po dužini.



c) Suprotni uglovi paralelograma su jednaki po veličini.



U svakom paralelogramu suprotne stranice su jednake po dužini.

U svakom paralelogramu suprotni uglovi su jednaki po veličini.

d) Kakvi su susjedni uglovi paralelograma? ?

Za paralelogram ABCD sa crteža je dato da je $AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC$. Budući da su uglovi α i β suuprotni transverzali AD (koja siječe paralelne prave AB i CD), oni su suplementni uglovi, odnosno $\alpha + \beta = 180^\circ$ (ovo se može pokazati i za svaki par susjednih uglova).



U svakom paralelogramu susjedni uglovi su suplementni.

Zadatak 2

Zbir dva suprotna ugla paralelograma je 158° . Izračunaj uglove paralelograma.

Primjer 4

Nacrtaj više različitih paralelograma. U svakom paralelogramu povuci obje dijagonale kao na crtežu i presječnu tačku označi slovom S. Presijeci ih po dijagonalama.



- Koji parovi trouglova su jednaki po obliku i veličini?
- Uporedi dužine AS i SC, te BS i SD.
- Šta možeš zaključiti?

Rješenje:

- Kada se svaki paralelogram presiječe po dijagonalama, dobijaju se četiri trougla. Parovi trouglova koji su jednaki po obliku i veličini su: $\triangle ASB$ i $\triangle CSD$, $\triangle ASD$ i $\triangle CSB$, prema crtežu.
- $\overline{AS} = \overline{SC}$ i $\overline{BS} = \overline{SD}$.
- Dijagonale paralelograma sijeku se u tački S i tačka S je njihova centralna tačka.

Dijagonale paralelograma se prepolovljavaju u presječnoj tački.

Zadatak 3

U paralelogramu MNPQ presječna tačka dijagonala je tačka S. Odredi dužinu dijagonala ako je $\overline{SP} = 8,5$ cm i $\overline{SQ} = 5,7$ cm.

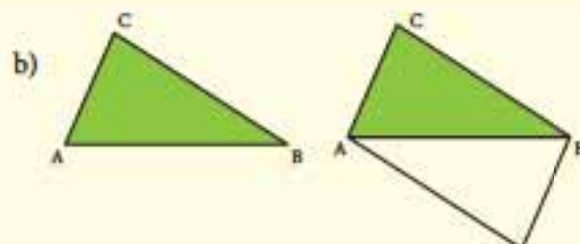
Primjer 5

Valbona je imala privjerek u obliku trougla. Ona je odnijela privjerek zlataru jer je željela da ga dopuni do oblika paralelograma.

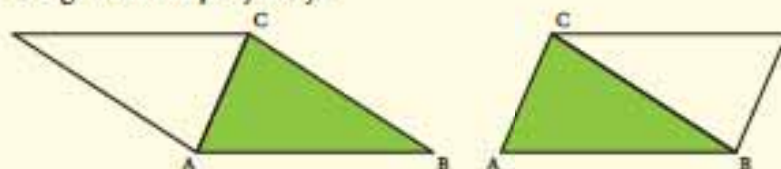
- Konstruiraj privjerek koristeći informacije o trouglu ABC, $\overline{AB} = 2,5$ cm i $\overline{AC} = 1,5$ cm i ugao između njih 60° .
- Dopuni dobijeni crtež do paralelograma.
- Koliko različitih dopunjavanja može da se napravi?

Rješenje:

- Ako je potrebno, podsjeti se iz lekcije „Konstrukcija trougla“ na korake konstrukcije trougla kada su date dvije stranice i ugao između njih.

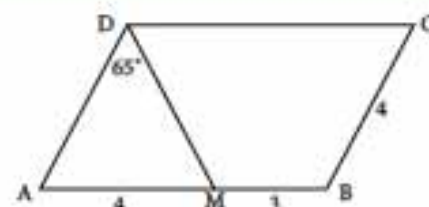


c) Drugi načini dopunjavanja

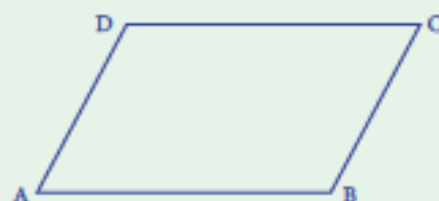


Zadatak 4

Na crtežu je dat paralelogram ABCD.
Odredi uglove i stranice ABCD?



Da li je paralelogram ABCD osnosimetrična 2D-forma? Objasni svoj odgovor.



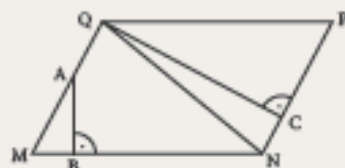
Odgovori na pitanja u svoju svesku. Za pitanje/a sa odgovorom DA zapiši objašnjenje i primjer, a za pitanje/a sa NE vrati se na lekciju i razgledaj odgovarajući primjer na pitanje.

1. Mogu da nabrojim svojstva paralelograma. DA/NE
2. Mogu da primijenim svojstva paralelograma u rješavanju problema. DA/NE
3. Kako da poboljšam svoje znanje o svojstvima paralelograma?

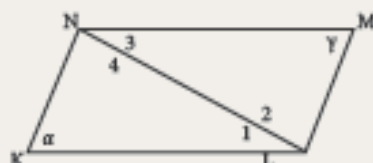
Samostalni rad

1. Četvorougao MNPQ je paralelogram.
Imenuj koja od nacrtanih duži je:

- a) njegova dijagonala
b) njegova visina



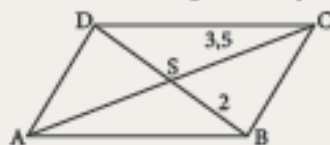
2. Nacrtaj paralelogram ABCD, a zatim iz temena D povuci visine.
3. U paralelogramu KLMN na crtežu je povučena dijagonala. Šta može da se zaključi za $\angle 1$ i $\angle 3$, $\angle 2$ i $\angle 4$?
Objasni svoj odgovor.



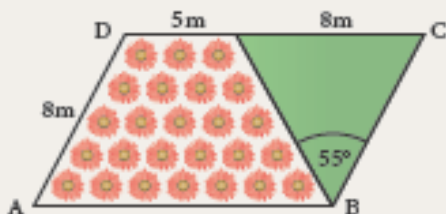
4. U paralelogramu ABCD, $\angle 1 = 42^\circ$. Izračunaj uglove tog paralelograma.



5. Četvorougao ABCD je paralelogram. Nađi dužine dijagonala.
Date dužine su predstavljene u cm.



6. Ugao u temenu M paralelograma MNPQ je 106° . Odredi ostale uglove paralelograma.
7. Pejzažni arhitekta želi urediti dvorišni prostor u obliku paralelograma koji je podijeljen na dva dijela: cvjetnjak u obliku trapeza i trouglasti travnjak. Dvorište treba da se ogradom ogradi. Za tu svrhu, potrebne su dužine stranica i veličine uglova dvorišta. Koristeći crtež, odredi tražene dužine i uglove.



- 8.* U paralelogramu MNPQ ($\angle Q > 90^\circ$) povučene su visine prema stranicama MN i NP. Izračunaj uglove paralelograma ako je ugao između povučenih visina:

- a) 80° b) 45°

Vrste paralelograma i njihova svojstva

Paralelogram je četvorougao sa dva para paralelnih stranica. Ova 2D-forma je osnovna za razumijevanje mnogih drugih geometrijskih koncepata i ima široku primjenu u realnom životu, kao i u različitim oblastima nauke i tehnologije. U ovoj lekciji upoznaćeš se sa različitim vrstama paralelograma. Svaki od paralelograma ima svoje karakteristike i svojstva po kojima se razlikuje od drugih, ali svi oni dijele osnovna svojstva paralelograma. Na primjer, suprotne stranice su uvijek paralelne i jednake, a suprotni uglovi su takođe jednaki.

Tokom ove lekcije istražiti ćemo vrste paralelograma i zabilježiti njihova specifična svojstva. Naučit ćeš kako razlikovati paralelograme od drugih 2D-oblika i kako se njihova svojstva mogu primijeniti u rješavanju zadataka i problema.



Primjer 1

Analiziraj svaki crtež zasebno i odgovori na pitanja:

Dvije prave $a \parallel b$ sijeku se s druge dvije prave $c \parallel d$, tako da $a \perp c$	
Dvije prave $a \parallel b$ sijeku se s druge dvije prave $c \parallel d$, ali je rastojanje između a i b jednako rastojanju između c i d	
Dvije prave $a \parallel b$ sijeku se s druge dvije paralelne prave $c \parallel d$, $a \perp c$ i rastojanje između c i d jednako je rastojanju između a i b	

- Da li su četverouglovi paralelogrami? Zašto?
- Kakve uglove ima svaki od paralelograma?
- Kakve stranice ima svaki od paralelograma?

Rješenje:

Četverougao na prvom crtežu je paralelogram, ima dva para paralelnih stranica i svaki par paralelnih stranica ima jednaku dužinu. Svi uglovi su pravi uglovi.

Paralelogram u kojem su svi uglovi pravi naziva se pravougaonik.

Četverougao na drugom crtežu je paralelogram, ima dva para paralelnih stranica i suprotni uglovi su mu jednaki. Kod ovog paralelograma sve stranice su jednake.

Paralelogram u kojem su sve stranice jednake naziva se romb.

Četverougao na trećem crtežu je paralelogram, ima dva para paralelnih stranica i svi uglovi su pravi uglovi. Sve stranice su jednake po dužini.

Paralelogram sa jednakim stranicama i pravim uglovima naziva se kvadrat.

Često paralelogram koji nije pravougaonik i nije romb nazivamo romboid.

Zadatak 1

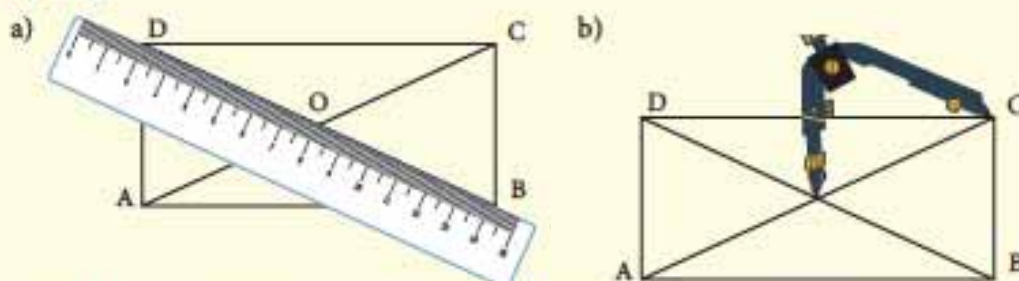
Neka tačke P, Q, R i S na paralelogramu ABCD budu sredine stranica AB, BC, CD i DA, odgovarajuće. Napravi crtež, analiziraj ga i odgovori koje vrste je četverougao PQRS.

Primjer 2

Crtaј u svoјu svesku prema sljedećim koracima:

- Nacrtaј tri različita pravougaonika.
- U svakom pravougaoniku povuci dijagonale i presječnu tačku označi slovom O.
 - Izmjeri dužinu dijagonala u svakom pravougaoniku i zapiši je. Šta se može zaključiti?
 - Vrh šestara stavi u presječnu tačku dijagonala kod svakog pravougaonika i otvaraj ga do jednog od temena. Kakvu kružnicu možeš nacrtati?
 - Da li, ako jedan paralelogram ima jednake dijagonale, možeš zaključiti da je on pravougaonik? Objasni svoj odgovor.

Rješenje:



Ukoliko si crtao precizno i tačno, dobićeš sljedeća svojstva pravougaonika:

U bilo kojem pravougaoniku njegove dvije dijagonale su međusobno jednake. Oko svakog pravougaonika može se opisati kružnica sa centrom u presjeku dijagonala.

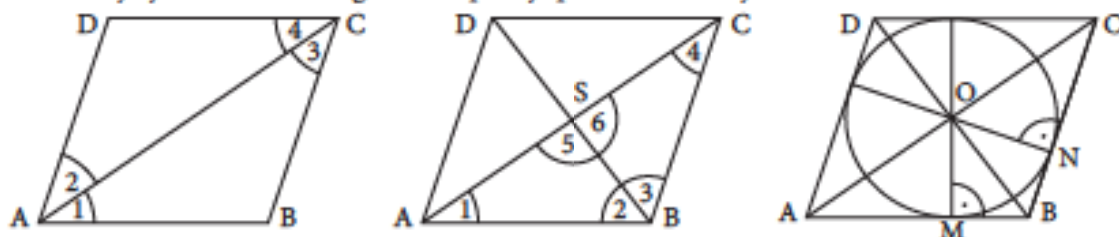
Ako su dijagonale jednog paralelograma jednake, tada je taj paralelogram pravougaonik.

Zadatak 2

Da li je pravougaonik osnosimetrična 2D-forma? Objasni svoj odgovor.

Primjer 3

Analiziraj sljedeće crteže i odgovori na pitanja povezana sa svojstvima romba:



- a) Zašto $\angle 1 = \angle 2$ i $\angle 3 = \angle 4$? Šta predstavlja dijagonala AC za $\angle A$ i $\angle C$? Da li se isto može zaključiti i za drugu dijagonalu?

Dijagonale romba su simetrale suprotnih uglova.

- b) Zašto $\triangle ABS$ i $\triangle CBS$ imaju jednaku formu i veličinu? Zapiši parove uglova koji su jednaki međusobno. Koliki je zbir $\angle 5$ i $\angle 6$? Zašto $\angle 5$ i $\angle 6$ imaju po 90° ? Kakav ugao zahvataju dijagonale AC i BD?

U svakom rombu dijagonale su međusobno normalne.

c) Da li je romb osnosimetrična 2D-forma? Objasni svoj odgovor.

Svaki romb je osnosimetrična 2D-forma sa dvije ose simetrije, i to simetrale suprotnih uglova.

d) Podsjeti se na upisanu kružnicu trougla. Uz pomoć trećeg crteža datog iznad objasni zašto se može upisati kružnica u romb.

U svaki romb može se upisati kružnica čiji je centar u presjeku dijagonala.

Zadatak 3

Ako u jednom paralelogramu dijagonale su međusobno normalne, tada je on romb. Objasni zašto.

Ako u jednom paralelogramu dijagonale su međusobno normalne, tada je on romb.

Budući da je svaki kvadrat pravougaonik sa jednakim stranicama ili romb sa pravim uglovima, sva svojstva koja važe za pravougaonike i rombove važe i za kvadrate.

Zadatak 4

Nacrtaj kvadrat i povuci njegove dijagonale. Zatim izvrši potrebna mjerenja i provjeri prethodni zaključak da za kvadrat važe sva svojstva kao za pravougaonik i za romb.

U svakom kvadratu dijagonale su jednake i međusobno normalne.

Primjer 4

Ana i Bojan žele da naprave ram za sliku dimenzija 40 cm i 30 cm. Oni imaju samo drvene štapiće koje mogu da režu i žele da se osiguraju da će ram biti pravougaoni. Kako mogu da provjere da li je njihov ram pravilno sastavljen koristeći svojstva paralelograma?

Rješenje:

Ana i Bojan prvo sastavljaju ram dimenzija 40 cm i 30 cm, tako da su dvije duže stranice paralelne i jednake, a dvije kraće stranice međusobno paralelne i jednake. Da bi provjerili da li je ram pravougaonik, oni će povući dijagonale iz suprotnih uglova (od gornjeg lijevog do donjeg desnog ugla i od gornjeg desnog do donjeg lijevog ugla).

Zatim će lenjirom izmjeriti dijagonale. Ako su dijagonale jednake, tada je ram pravougaonik.

Ako dijagonale nisu jednake, to znači da je ram iskrivljen i treba da ga koriguju, tako da stranice ponovo budu paralelne i jednake dužine. Ova metoda može da se koristi ne samo za izradu ramova, već i za provjeru ispravnosti prozora, vrata, stolova ili drugih pravougaonih objekata u svakodnevnom životu.

Zadatak 5

Nacrtaj kvadrat ABCD. Povuci dijagonale i simetrale stranica.

- Šta se dešava sa presjekom dijagonala i presjekom simetrala stranica?
- Stavi vrh šestara u presjek dijagonala. Koliko kružnica možeš nacrtati? Imenuj svaku kružnicu i označi njen centar i radijus.

Svaki kvadrat ima upisanu i opisanu kružnicu sa zajedničkim centrom (presjek dijagonala).

Da li je kvadrat osnosimetrična 2D-forma? Objasni svoj odgovor.

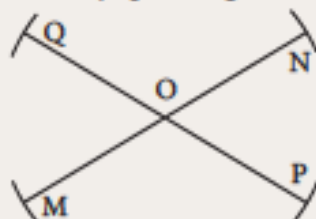
Odgovori u tvojoj svesci na sljedeća pitanja da procijeniš koliko si savladao gradivo iz lekcije:

- Da li mogu prepoznati i imenovati sve vrste paralelograma (pravougaonik, kvadrat, romb, romboid)?
- Da li mogu tačno opisati njihova svojstva (jednake stranice, uglovi, dijagonale)?
- Da li mogu objasniti kako se razlikuju pravougaonik, kvadrat, romb i romboid?
- Da li mogu rješavati probleme u kojima se koriste svojstva paralelograma?

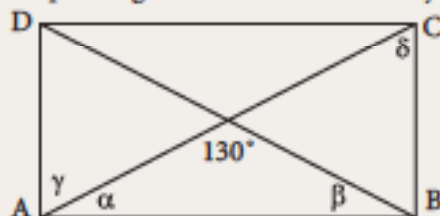
Svoj odgovor dopuni primjerom ili crtežom. Podijeli odgovore sa svojim školskim drugovima.

Samostalni rad

1. U rombu ABCD tačke A_1 , B_1 , C_1 i D_1 su sredine stranica AB, BC, CD i DA. Kakav se paralelogram dobija povezivanjem ovih tačaka?
2. a) Šta je pravougaonik?
b) Šta je romb?
3. Dužine MN i PQ na crtežu su jednake. One se prepolovljavaju u presječnoj tački O i formiraju paralelogram MNPQ. Da li je on pravougaonik? Zašto?



4. Napiši zajednička svojstva kvadrata i rombova.
5. Za pravougaonik sa crteža izračunaj označene uglove.



6. Nabroj zajednička svojstva kvadrata i pravougaonika. Po kojim se svojstvima oni razlikuju?
7. U rombu ABCD ugao između manje dijagonale i stranice iznosi 56° . Izračunaj uglove romba.
8. * U stolarskoj radionici izrađuju dio namještaja od drveta – nosač za televizor. Nosač treba da bude u obliku romba čija je kraća dijagonala jednaka stranici romba (0,8 m). Za veću funkcionalnost nosača, treba da se stavi drugi dio u obliku kruga koji će dodirivati svaku od stranica romba. Napravi crtež kojim ćeš potpuno prikazati dizajn nosača. Odredi uglove romba.

Oсна simetrija u koordinatnom sistemu

Očna simetrija je preslikavanje u ravnini kada se jedan oblik prema datom pravilu preslikava preko prave nazvane osa simetrije, tako da original i slika izgledaju identično, kao ogledalska slika.

Ovom lekcijom naučićeš kako da odrediš položaj 2D-oblika u koordinatnom sistemu i kako da uporediš sliku i original pri preslikavanju. Takođe, rešavaćeš interesantne probleme o osnoj simetriji, što će ti pomoći da razumiješ kako se ova pojava koristi u svakodnevnom životu, umjetnosti i nauci.

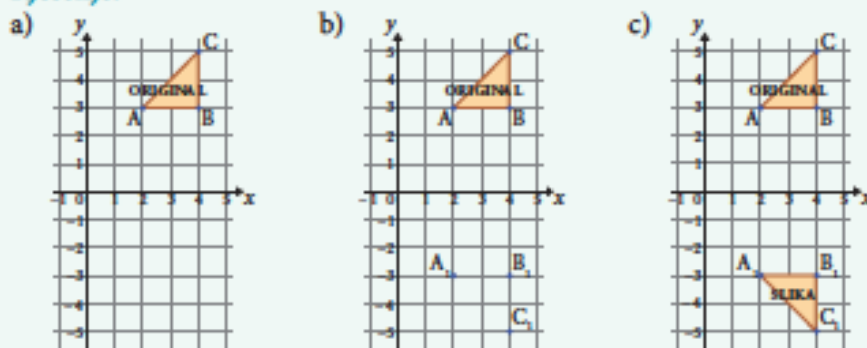


Primjer 1

Nacrtaj koordinatni sistem i postupi prema sljedećim zahtjevima:

- Nacrtaj $\triangle ABC$ u koordinatnom sistemu. Temena imaju koordinate $A(2, 3)$, $B(4, 3)$ i $C(4, 5)$.
- Odredi tačke A_1 , B_1 i C_1 simetrične temenima A , B i C trougla u odnosu na x -osu.
- Koje su koordinate trougla $A_1B_1C_1$?

Rješenje:



- c) Koordinate temena slike trougla ABC su: $A_1(2, -3)$; $B_1(4, -3)$ i $C_1(4, -5)$.

Zadatak 1

Nacrtaj koordinatni sistem i postupi prema sljedećim zahtjevima:

- Nacrtaj pravougaonik PQRS u koordinatnom sistemu, čija temena imaju koordinate: $P(-3, 1)$, $Q(-3, 4)$, $R(-6, 4)$ i $S(-6, 1)$.

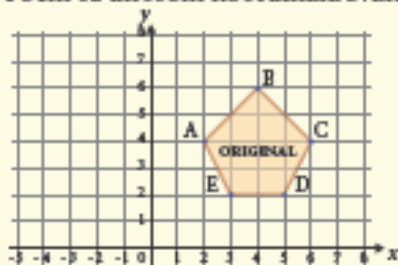
- b) Nacrtaj sliku pravougaonika PQRS pri osnoj simetriji sa osom simetrije y -osom.
 c) Odredi koordinate temena novog pravougaonika $P_1Q_1R_1S_1$.

Primjer 2

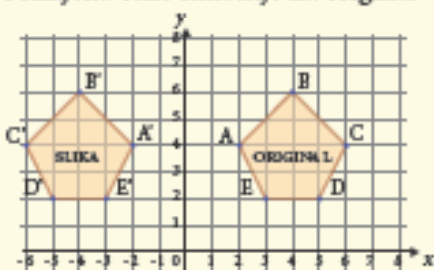
- a) Nacrtaj petougao u koordinatnom sistemu ako su njegova temena:
 $A(2, 4)$, $B(4, 6)$, $C(6, 4)$, $D(5, 2)$, $E(3, 2)$.
 b) Odredi sliku petougla ABCDE pri osnoj simetriji sa osom simetrije y -osom. Zapiši koordinate slike svakog temena petougla ABCDE.

Rješenje:

- a) Počni sa unosom koordinata svakog temena petougla ABCDE u koordinatni sistem:



- b) Primjena osne simetrije na original



Nove koordinate temena su:

$A(2, 4) \rightarrow A'(-2, 4)$, $B(4, 6) \rightarrow B'(-4, 6)$, $C(6, 4) \rightarrow C'(-6, 4)$, $D(5, 2) \rightarrow D'(-5, 2)$ i
 $E(3, 2) \rightarrow E'(-3, 2)$

Slika petougla je simetrična originalu u odnosu na y -osu, što znači da će se koordinata x za svako teme zamijeniti svojom suprotnom vrijednošću (ako je pozitivna, postat će negativna i obrnuto), dok će koordinata y ostati nepromijenjena.

Pri ovoj osnoj simetriji slike temena petougla nalaze se na suprotnoj strani y -ose, ali na istoj udaljenosti od nje.

Pitanja za dodatno razmišljanje:

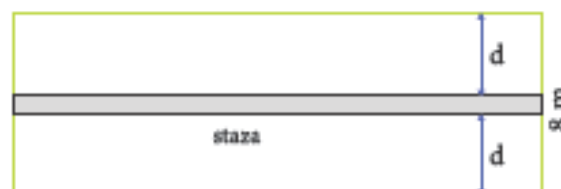
- a) Šta će se desiti sa petuglom ABCDE pri osnoj simetriji sa osom simetrije x -osom?
 b) Kakve promjene će se napraviti na koordinatama petougla ako je osa simetrije prava koja prolazi kroz tačku $E(0, 1)$ i paralelna je sa x -osom?

Zadatak 2

- Nacrtaj šestougao ABCDEF u koordinatnom sistemu, sa koordinatama: A(2, 6), B(4, 7), C(6, 5), D(5, 3), E(3, 3), F(2, 4).
- Odredi sliku šestougla ABCDEF pri osnoj simetriji sa osom simetrije y -osom. Zapiši koordinate slike svake temene šestougla ABCDEF.
- Kakve promjene nastaju na koordinatama slike šestougla?
- *Bez crtanja, pokušaj da odgovoriš koje bi bile x -koordinate svake temene slike šestougla ABCDEF pri osnoj simetriji u odnosu na pravu koja prolazi kroz tačku F (-3, 0) i paralelna je sa y -osom.

Primjer 3

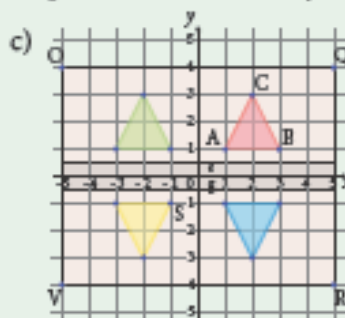
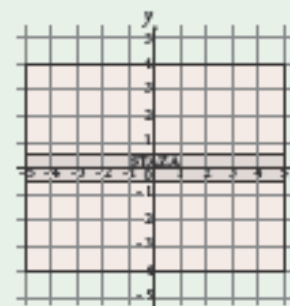
Ti si arhitekta koji treba da izradi plan za uređenje dvorišta sa simetričnim dizajnom. U dvorištu treba da se postave četiri velike cvjetne leje u obliku trouglova. Leje su raspoređene tako da je svaka simetrična u odnosu na stazu u dvorištu.



- Koju osu iz koordinatnog sistema bi izabrao prema stazi na datom crtežu?
- Izaberi koordinate temena jedne od cvjetnih leja u obliku trougla.
- Nacrtaj dvorište sa simetričnim dizajnom.

Rješenje:

- Najbolje i najjednostavnije za crtanje bi bilo ako izaberemo x -osu koordinatnog sistema da se poklapa sa stazom koja je data na crtežu. Međutim, u dvorištu x -osa treba da bude na sredini staze. Zašto? Na šta ćeš paziti pri crtanju y -ose? Koliko je duga staza?
- Prva cvjetna leja neka bude u prvom kvadrantu, trougao ABC sa koordinatama A (1, 1), B (3, 1) i C (2, 3). Na šta treba da paziš pri izboru koordinata temena trougla? Koje su najveća i najmanja moguća vrijednost x i y -koordinata jedne temene cvjetne leje u prvom kvadrantu? Objasni svoj odgovor.



Zadatak 3

Vera želi postaviti četiri ogledala na jedan zid u svom kozmetičkom salonu. Pri tom treba da budu ispunjeni sljedeći uslovi:

1. Ogledala da imaju oblik kvadrata.
 2. Dijagonala jednog od ogledala treba da bude normalna na rub poda.
 3. Kod drugog ogledala stranica treba da bude paralelna sa rubom poda.
- a) Napravi svoj raspored ogledala u koordinatnom sistemu koristeći osnu simetriju.
- b) Kako možeš dobiti kompoziciju ogledala tako da je, na primjer, u prvom i drugom kvadrantu koordinatnog sistema ogledalo čija je dijagonala normalna na x -osu, a u trećem i četvrtom kvadrantu su ogledala čija je stranica paralelna na x -osu.

Kako možeš koristiti osnu simetriju da riješiš realne probleme? Možeš li navesti konkretan primjer iz svakodnevnog života gdje simetrija igra važnu ulogu?

Odgovore na svako pitanje zapiši u svoju svesku. Za svoj odgovor zapiši primjer ako si odgovorio/la sa DA, a za odgovore Djelimično i Ne objasni zašto.

1. Da li mogu tačno pročitati koordinate tačke po simetriji u odnosu na datu osu?
☐ Da ☐ Djelimično ☐ Ne
2. Da li mogu odrediti sliku pri osnoj simetriji mnogougla u koordinatnom sistemu?
☐ Da ☐ Djelimično ☐ Ne
3. Da li razumijem kako primijeniti osnu simetriju u realnim situacijama (kao u primjeru sa pozicioniranjem ogledala i sl.)?
☐ Da ☐ Djelimično ☐ Ne
4. Šta mogu da uradim za bolje savladavanje gradiva? (Napiši kratak odgovor.)

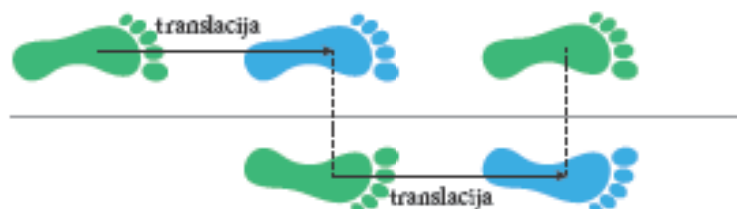
Samostalni rad

1. Gradski park ima pravougaoni bazen čije su dimenzije date u koordinatnom sistemu. Temena bazena su $A(2, 3)$, $B(6, 3)$, $C(6, -1)$ i $D(2, -1)$. Planiraj cvjetni aranžman simetričan bazenu u odnosu na y -osu i odredi koordinate cvjetnog aranžmana.
2. U izradi postera za događaj treba da se dizajnira simetričan element u obliku trougla sa temenima $A(-2, 1)$, $B(0, 4)$, $C(2, 1)$. Nacrtaj trougao i njegovu sliku po simetriji u odnosu na x -osu.
3. Ako je tačkama $A(3, 1)$, $B(5, 1)$, $C(5, -1)$ i $D(3, -1)$ određena položaj ogledala, odredi koordinate njegove slike pri osnoj simetriji u odnosu na pravu koja prolazi kroz tačku $M(0, -3)$ i paralelna je sa x -osom.
- 4.* Bašta ima centralni cvjetni aranžman u obliku kruga čiji je centar u tački $(4, 2)$, a poluprečnik je 2 jedinice. Planiraj simetričan krug u odnosu na x -osu, zapiši koordinate centra i opiši novu poziciju.
5. Prozor ima oblik kvadrata sa temenima $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 3)$ i $D(1, 3)$. Nađi koordinate njegove slike po osnoj simetriji u odnosu na pravu koja prolazi kroz tačku $K(2, 0)$ i paralelna je sa y -osom.
6. Pod kupatila je predstavljen koordinatnim sistemom. Ako je jedna pločica pravougaonik sa temenima $A(-2, -1)$, $B(0, -1)$, $C(0, -3)$ i $D(-2, -3)$, odredi koordinate simetrične pločice u odnosu na y -osu.
- 7*. Pri restauraciji poda u antičkom objektu arheolozi su primijetili da su korištene pločice čiji je dezen simetričan u odnosu na dvije međusobno normalne prave koje su date na crtežu. Oni treba da otkriju početni dezen pločice, ali dijelovi nje su polomljeni ili izbrisani. Koristi crteže i pomoz arheolozima da nacrtaju početni dezen pločica koje su korištene veoma davno.



Translacija u koordinatnom sistemu

Translacija je pomjeranje 2D-forme bez mijenjanja njenog oblika ili veličine. Pri translaciji, svaka tačka 2D-forme se pomjera u istom pravcu i za istu udaljenost. Cilj ove lekcije je da naučiš kako da određuješ nove koordinate tačaka mnogougla translacijom, da razlikuješ original i sliku mnogouglova i da rješavaš matematičke probleme koji uključuju translaciju.

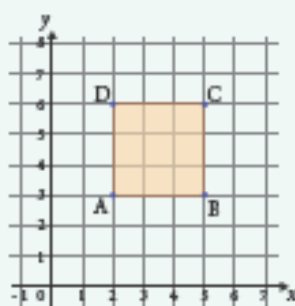


Primjer 1

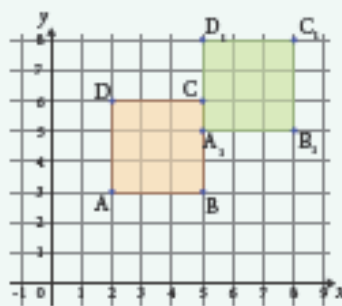
- U koordinatnom sistemu nacrtaj mnogougao sa temenima $A(2, 3)$, $B(5, 3)$, $C(5, 6)$ i $D(2, 6)$.
- Izvrši translaciju ovog mnogougla tako da se svaka tačka pomjeri za 3 jedinice po osi x udesno i 2 jedinice po osi y nagore.
- Odredi koordinate temena slike nakon translacije.

Rješenje:

a)



b)



- Iz koordinatnog sistema možeš pročitati temena slike mnogougla $ABCD$
 $A_1(5, 5)$, $B_1(8, 5)$, $C_1(8, 8)$, $D_1(5, 8)$

Zadatak 1

U koordinatnom sistemu je dat petougao sa sljedećim koordinatama temena: $A(1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(5, 5)$, $D(3, 7)$, $E(1, 6)$. Izvrši translaciju petougla tako da se svaka tačka pomjeri za 4 jedinice udesno i 3 jedinice nadolje. Koje će biti nove koordinate temena dobijenog petougla nakon translacije?

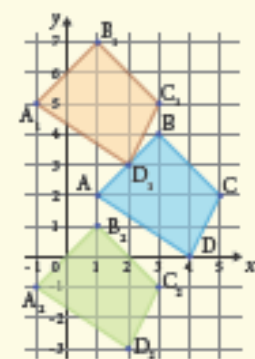
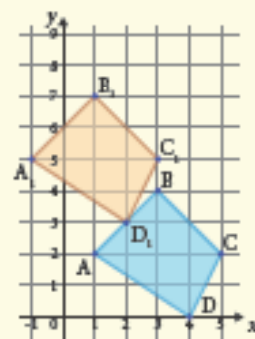
Primjer 2

Dat je mnogougao u koordinatnom sistemu sa sljedećim koordinatama temena: $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$ i $D(4, 0)$. Izvrši translaciju ovog mnogougla tako da se svaka tačka pomjeri za 2 jedinice ulijevo i 3 jedinice nagore.

- Odredi koordinate temena slike mnogougla ABCD nakon translacije.
- Opiši promjenu koordinata svake tačke (originala i slike). Koje su razlike između koordinata originala i slike?
- Kako bi se promijenile koordinate ako bi translacija bila urađena u suprotnom smjeru (na primjer, 2 jedinice ulijevo i 3 jedinice nadolje)? Urađi novu translaciju i odredi koordinate.
- Umjesto da čitaš koordinate temena slike mnogougla ABCD, napiši kako ćeš ih izračunati za translaciju 2 jedinice ulijevo i 3 jedinice nadolje.
- Objasni značenje riječi „original“ i „slika“ u kontekstu translacije. Kako identifikuješ ove pojmove na koordinatnom sistemu?
- Riješi sljedeći problem sa translacijom: Ukoliko imaš druge tačke $P(2, 3)$ i $Q(5, 6)$, a translacija treba biti za 1 jedinicu udesno i 4 jedinice nagore, koje će biti koordinate dobijenih tačaka?

Rješenje:

- Iz koordinatnog sistema možeš pročitati koordinate slike mnogougla ABCD pri translaciji 2 jedinice ulijevo i 3 jedinice nagore:
- Promjena koordinata svake tačke je u dodavanju 2 jedinice ulijevo i 3 jedinice nagore. Na primjer: za tačku $A(1, 2)$, nova tačka $A_1(-1, 5)$ ima koordinatu koja se smanjuje za 2 po osi x i povećava za 3 po osi y . Ista promjena se dešava za sve tačke mnogougla.
- Ako je translacija za 2 jedinice ulijevo i 3 jedinice nadolje, x -koordinate slike bi bile iste kao u prvoj translaciji, ali u ovom slučaju y -koordinata svake tačke se ne povećava, nego se smanjuje za 3, odnosno: $A(1, 2) \rightarrow A_2(-1, -1)$; $B(3, 4) \rightarrow B_2(1, 1)$; $C(5, 2) \rightarrow C_2(3, -1)$ i $D(4, 0) \rightarrow D_2(2, -3)$.
- Budući da je u ovom slučaju translacija mnogougla ABCD za 2 jedinice ulijevo i 3 jedinice nadolje, imamo: x -koordinate temena mnogougla $A_2 B_2 C_2 D_2$ su za 2 jedinice manje od x -koordinata mnogougla ABCD, a y -koordinate mnogougla $A_2 B_2 C_2 D_2$ su za 3 jedinice manje od y -koordinata originala. Odnosno: $A(1, 2) \rightarrow A_2(-1, -1)$; $B(3, 4) \rightarrow B_2(1, 1)$; $C(5, 2) \rightarrow C_2(3, -1)$, $D(4, 0) \rightarrow D_2(2, -3)$.



e) U kontekstu translacije:

Original: Mnogougao ima koordinate temena prije nego što se primijeni translacija. One predstavljaju početnu poziciju mnogougla u koordinatnom sistemu.

Slika: Novi mnogougao sa novim koordinatama temena nakon translacije, kada je mnogougao premješten na novu poziciju. Slika pokazuje poziciju mnogougla nakon translacije. U koordinatnom sistemu original je prikazan tačkama na početnoj poziciji, a slika tačkama na novoj poziciji, nakon izvršene translacije.

f) Translacija tačaka $P(2, 3)$ i $Q(5, 6)$ za 1 jedinicu udesno i 4 jedinice nagore daće nove koordinate: $P(2, 3) \rightarrow P_1(3, 7)$ i $Q(5, 6) \rightarrow Q_1(6, 10)$. Objasni kako su dobijene koordinate P_1 i Q_1 .

Zadatak 2

Dat je šestougao sa koordinatama njegovih temena: $A(2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(6, 2)$, $D(7, 4)$, $E(5, 6)$ i $F(3, 5)$. Translacija je zadana sa 3 jedinice udesno i 2 jedinice nadolje.

- Odredi koordinate temena slike šestougla nakon translacije iz koordinatnog sistema.
- Objasni promjenu koordinata svakog temena (originala i slike) pri translaciji. Kako se mijenjaju koordinate temena nakon translacije?
- Izmjeri lenjirom dužinu svake stranice originalnog šestougla, a zatim je uporedi sa dužinom odgovarajuće stranice šestougla nakon translacije. Da li translacija mijenja rastojanje između tačaka?
- *Kako bi se promijenile koordinate ako bi translacija bila urađena za 3 jedinice ulijevo i 4 jedinice nagore? Bez da uradiš translaciju, odredi koje će biti koordinate temena slike originala?

Primjer 3

Ana radi u kompaniji za prevoz paketa. Ona treba da izračuna novu lokaciju dva paketa koja se nalaze na različitim pozicijama u magacinu. Kada dobije novu pošiljku, ona treba da premjesti dva paketa sa istom translacijom. Početne pozicije paketa su date koordinatama: paket 1: $A(2, 3)$ i paket 2: $B(5, 4)$.

Translacija koja treba da se izvrši je pomjeranje za 6 jedinica udesno i 2 jedinice nagore.

- Koje će biti nove koordinate paketa nakon pomjeranja?
- Objasni kako se izračunavaju nove koordinate nakon translacije paketa.
- Šta će se desiti sa rastojanjem između paketa A i B prije i poslije translacije?

Rješenje:

- Nove koordinate paketa: Da bismo dobili nove koordinate paketa, treba na x -koordinatu dodati 6, a na y -koordinatu dodati 2. Ovo je zbog translacije za 6 jedinica udesno i 2 jedinice nagore.

Za paket 1, od tačke sa koordinatama $A(2, 3)$ nakon translacije biće u tački $A_1(8, 5)$.
 Za paket 2, od tačke sa koordinatama $B(5, 4)$ nakon translacije biće u tački $B_1(11, 6)$.

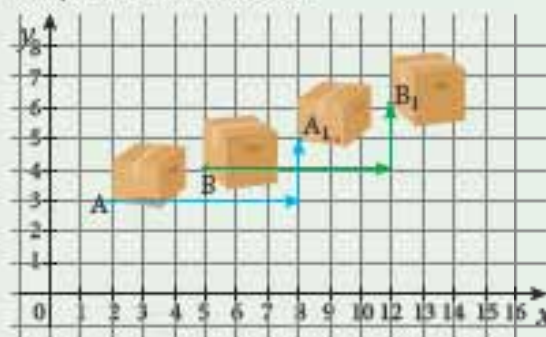
- b) Nove koordinate paketa A i B nakon translacije:

Na x -koordinatu svakog paketa dodajemo 3 (zbog pomjeranja po osi x , udesno).

Na y -koordinatu svakog paketa dodajemo 2 (zbog pomjeranja po osi y , nagore).

Ove promjene se primjenjuju na svaku tačku (paket) da bi se dobila nova pozicija nakon translacije.

- c) Rastojanje između paketa ostaje isto prije i poslije translacije, jer translacija ne mijenja udaljenost između tačaka.



Translacija paketa mijenja njihovu poziciju, ali zadržava rastojanje između njih.

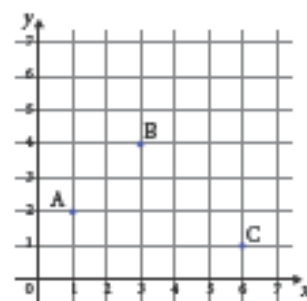
Translacija čuva rastojanja.

Zadatak 3

Toni, koji radi kao menadžer parking-garaže, treba da izračuna novi raspored automobila nakon translacije. Automobili koji su u garaži treba da se pomjere da bi se stvorilo više slobodnog prostora za nova vozila.

Početne koordinate automobila u garaži: Automobil 1: $A(1, 2)$, Automobil 2: $B(3, 4)$, Automobil 3: $C(6, 1)$. Toni treba da premjesti automobile za 2 jedinice udesno i 3 jedinice nagore.

- a) Kakve će biti nove koordinate automobila nakon izvršenja translacije?
 b) Objasni kako se izračunavaju nove koordinate automobila.



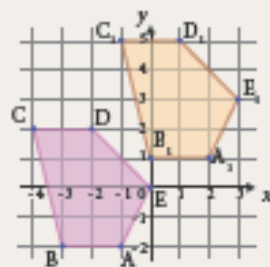
Kako translacija tačaka u koordinatnom sistemu utiče na geometrijske objekte kao što su mnogouglovi ili oblici iz svakodnevnog života? Objasni kako se može primijeniti translacija na zadatke koji uključuju raspoređivanje ili premještanje objekata, kao što je premještanje automobila u garaži ili planiranje rasporeda namještaja u prostoriji.

Odgovori na pitanja u tvojoj svesci. Odgovor na svako pitanje objasni kroz primjer i podijeli ga sa svojim školskim drugovima.

1. Da li jasno razumijem i primjenjujem pravila za translaciju u koordinatnom sistemu?
2. Da li mogu odrediti nove koordinate tačaka i geometrijskih figura nakon translacije i objasniti kako se mijenjaju njihovi položaji?
3. Da li mogu objasniti razliku između translacije i osne simetrije?
4. Kako sam primijenio/la translaciju u rješavanju praktičnih problema?

Samostalni rad

1. U koordinatnom sistemu nalazi se trougao sa koordinatama temena: $A(2, 3)$, $B(4, 6)$ i $C(6, 2)$. Ako se ovaj trougao premjesti za 4 jedinice ulijevo i 2 jedinice nagore, koje će biti nove koordinate tri temena trougla?
2. Dat je kvadrat u koordinatnom sistemu sa koordinatama temena: $A(1, 1)$, $B(1, 4)$, $C(4, 4)$, $D(4, 1)$. Primijeni translaciju da pomjeriš kvadrat za 2 jedinice udesno i 3 jedinice nadolje. Zapiši nove koordinate kvadrata.
3. Data je prava koja prolazi kroz tačke $P(2, 4)$ i $Q(5, 8)$. Ako primijeniš translaciju ove prave za 2 jedinice ulijevo i 2 jedinice nagore, koje će biti koordinate dobijenih tačaka P_1 i Q_1 ?
4. Data je slika paralelograma sa temenima: $A_1(0, 0)$, $B_1(4, 2)$, $C_1(5, 5)$, $D_1(1, 3)$ dobijena translacijom originalnog paralelograma za 5 jedinica udesno i 1 jedinicu nagore. Zapiši koordinate originalnog paralelograma, prije translacije.
- 5.* a) Koje su koordinate originala (ružičastog mnogougla), a koje su koordinate slike (narandžastog mnogougla)?
b) Za koliko je pomjeren mnogougao po x -osi, a za koliko po y -osi?



Rotacija mnogougona i primjena

Rotacija u datoj ravni je jedna od osnovnih geometrijskih transformacija koja mijenja položaj geometrijskih oblika u datom koordinatnom sistemu. U ovoj lekciji ćeš naučiti kako rotirati mnogougao oko date tačke za određeni ugao. Upoznaćeš se sa načinom na koji se određuje nova pozicija temena mnogougona i primijetiti kako se mijenjaju njegove koordinate nakon rotacije. Istraživaćeš osnovne principe rotacije, kao što su ugao rotacije i smjer, i primjenjivaćeš ove pojmove za rješavanje praktičnih problema iz svakodnevnog života.

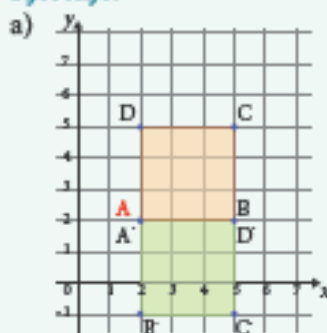


Primjer 1

Dati je kvadrat sa koordinatama temena: $A(2, 2)$, $B(5, 2)$, $C(5, 5)$ i $D(2, 5)$.

- Rotiraj kvadrat za ugao od 90° oko temena A u smjeru kretanja kazaljki na satu.
- Zapiši koordinate kvadrata $A'B'C'D'$, koji je slika kvadrata $ABCD$ pri datoj rotaciji.

Rješenje:



- b) Novi kvadrat (slika) nakon rotacije za 90° oko tačke A ima koordinate temena: $A'(2, 2)$, $B'(2, -1)$, $C'(5, -1)$ i $D'(5, 2)$.

Zadatak 1

Dati je petougao ABCDE sa koordinatama: A(1, 2), B(3, 2), C(4, 4), D(2, 5) i E(0, 4).

Rotiraj petougao za 90° u smjeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu oko temena A(1, 2).

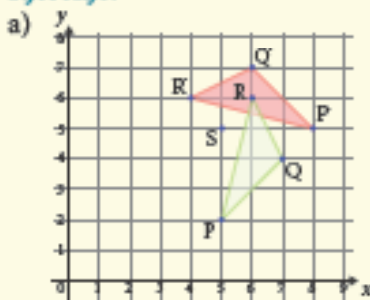
- Koje su koordinate novih tačaka B', C', D' i E'?
- Kakva je promjena u položaju petougla nakon rotacije?
- Da li original i slika imaju isti oblik i veličinu? Objasni zašto.

Primjer 2

Tačke P(5, 2), Q(7, 4) i R(6, 6) su temena $\triangle PQR$.

- Rotiraj $\triangle PQR$ oko tačke S(5, 5) za 90° u smjeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu.
- Odredi nove koordinate tačaka P', Q' i R' nakon rotacije oko tačke S za 90° stepeni.
- Izmjeri $\overline{PQ}$, i uporedi je sa $\overline{P'Q'}$. Šta primjećuješ?
- Da li trougao zadržava svoj oblik i veličinu nakon rotacije? Objasni.
- Kakav je položaj novog trougla u odnosu na početni trougao?

Rješenje:



- Trougao koji je slika pri rotaciji ima temena sa koordinatama: P'(8, 5), Q'(6, 7) i R'(4, 6).
- Može se primijetiti da je rastojanje između tačaka P i Q isto kao rastojanje između P' i Q', odnosno $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$. Isto važi za ostala rastojanja između odgovarajućih tačaka. Rotacija zadržava rastojanje između tačaka.
- Trougao zadržava svoj oblik i veličinu. Rotacija ne mijenja dužinu stranica i ne mijenja uglove trougla. Mijenja se samo njegov položaj u koordinatnom sistemu.
- Položaj novog trougla je različit — zavisi od ugla i smjera rotacije, ali je on identičan po obliku i veličini sa početnim.

Zadatak 2

Dati je četvorougao ABCD sa koordinatama: A(2, 3), B(4, 3), C(4, 5) i D(2, 5). Rotiraj četvorougao za 90° u smjeru kretanja kazaljki na satu oko tačke S(1, -1).

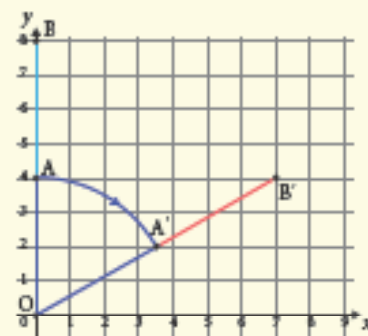
- Koje su koordinate temena A', B', C' i D' nakon rotacije ABCD?
- Da li su original i slika identični po veličini? Objasni zašto.

Primjer 3

Duži AB izvrši rotaciju za ugao od 60° u smjeru kazaljki na satu oko tačke O(0, 0). Koje su koordinate duži A'B'?

Rješenje:

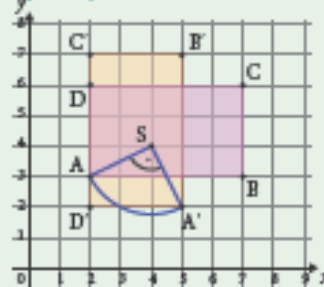
Iz koordinatnog sistema pročitaj i zapiši koordinate krajnjih tačaka slike duži AB nakon rotacije.



Primjer 4

U planu za stazu u gradskom parku arhitekta ima položaj staze u koordinatnom sistemu. Staza ima oblik pravougaonika sa koordinatama temena A(2, 3), B(7, 3), C(7, 6) i D(2, 6). Arhitekta želi da rotira stazu za 90° u smjeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu, oko tačke S(4, 4), kako bi stvorio novi izgled staze. Odredi nove koordinate temena staze nakon rotacije.

Rješenje:



Iz crteža se mogu pročitati koordinate nove staze: A'(5, 2), B'(5, 7), C'(2, 7) i D'(2, 2).

Kako rotacija mnogougla oko date tačke utiče na njegov oblik i njegovu veličinu? Da li se pri rotaciji sva temena mnogougla pomjeraju jednako i na isti način? Objasni šta se dešava sa pozicijama temena mnogougla kada se rotiraju za različite uglove. Zašto je važno znati centar rotacije kada se radi sa rotacijom u prirodnim ili geografskim kontekstima? Istražuj.

Zapiši u svoju svesku: Da li si zadovoljan/na razumijevanjem koraka rotacije? Objasni šta možeš uraditi bolje sljedeći put.

Samostalni rad

Čime je određena jedna rotacija?

- Izvrši rotaciju $\triangle ABC$ sa temenima $A(2, 3)$, $B(5, 5)$ i $C(4, 8)$ za ugao od 90° u smjeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu oko tačke $S(4, 4)$.
 - Koje će biti nove koordinate temena A' , B' i C' nakon rotacije?
 - Kako će se promijeniti položaj trougla u odnosu na njegovo početno mjesto?
- Dati je pravougaonik sa koordinatama $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(5, 4)$ i $D(1, 4)$. Rotiraj pravougaonik za 180° oko tačke koja je presjek dijagonala pravougaonika.
 - Odredi koordinate temena pravougaonika nakon rotacije.
 - Kakva je razlika u položaju pravougaonika prije i nakon rotacije?
 - Kako centar rotacije koji je presjek dijagonala utiče na samu rotaciju?
- Dati je mnogougao sa temenima $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$, $D(4, 0)$ i $E(2, 0)$. Rotiraj mnogougao za 270° u smjeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu oko tačke $O(0, 0)$.
 - Odredi koordinate novih temena A' , B' , C' , D' i E' nakon rotacije.
 - Kako ova rotacija utiče na raspored tačaka u odnosu na početni položaj mnogougla?
 - Koliko često se koristi rotacija oko koordinatnog početka u geometrijskim problemima i u kojim slučajevima? Istražuj.
- Trougao sa koordinatama temena $A(2, 3)$, $B(6, 4)$ i $C(5, 7)$ rotiraj za 30° u smjeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu oko njegovog težišta.
 - Koja će biti nova pozicija trougla nakon rotacije? Odredi koordinate slike trougla.
 - Kako će izgledati trougao nakon rotacije u odnosu na njegov početni položaj?

Predstavljnje 3D-oblika u različitim projekcijama

Ova lekcija će ti pomoći da naučiš kako da predstavljaš trodimenzionalne oblike (3D-oblike) gledane sa različitih strana. Predstavljanje objekata u prostoru je veoma važno da bi mogao/la razumjeti i analizirati različite perspektive jednog oblika. Naučićeš kako da gledaš i crtaš 3D-oblike iz tri različite pozicije: sprijeda, odozgo i sa strane.

- Gledano sprijeda (frontalna projekcija) – to je kao da gledaš oblik sa prednje strane, što ti pokazuje visinu i dužinu objekta.
- Gledano odozgo (planska projekcija) – to je kao da gledaš oblik odozgo, što ti pomaže da vidiš dužinu i širinu objekta.
- Gledano sa strane (profilna projekcija) – to je kao da gledaš oblik sa strane, što ti pokazuje visinu i širinu objekta.

Ovo znanje je osnova za dalje učenje i biće ti korisno u različitim oblastima, kao što su geometrija, arhitektura i inženjerstvo.



Primjer 1

Izradi mrežu piramide sa osnovom kvadrat.

Rješenje:



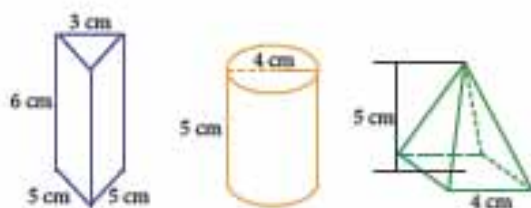
U osnovi, dobijanje 2D-crteža kojima predstavljamo 3D-oblik gledan sa različitih strana (odozgo, sprijeda, sa strane) je jedna vrsta preslikavanja, odnosno ortogonalnog projektovanja. Ortogonalna projekcija tačke na ravan je presjek normale povučene kroz tačku prema datoj ravni.



Primjer 2

Data su tri različita 3D-oblika: prizma, cilindar i piramida. Tvoj zadatak je da prikažeš ove oblike iz tri različite pozicije gledanja: odozgo, sprijeda i sa strane.

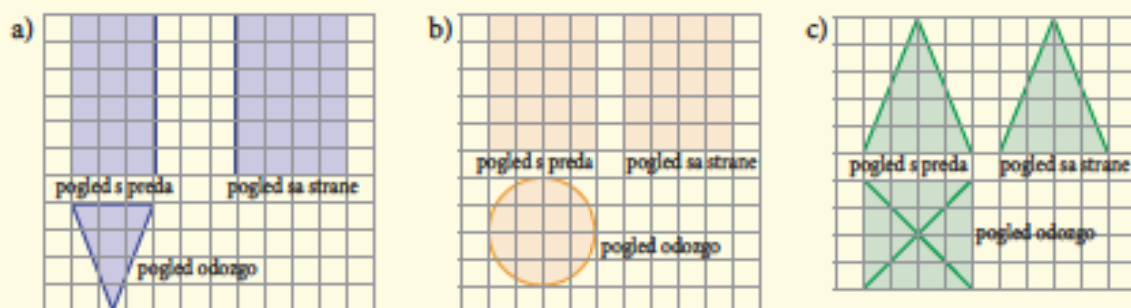
- a) Kako izgleda prizma kada se gleda sprijeda, odozgo i sa strane?



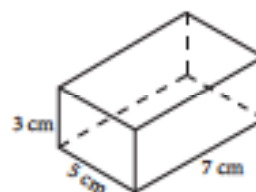
- b) Kako izgleda cilindar kada se gleda sprijeda, odozgo i sa strane?
 c) Kako izgleda piramida kada se gleda sprijeda, odozgo i sa strane?

Rješenje:

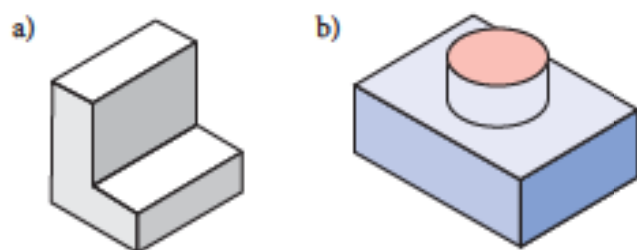
Na crtežima iz ovog primjera dužina od 1 cm predstavljena je dužinom od 1 kvadratića kvadratne mreže.

**Zadatak 1**

Nacrtaj tri projekcije kvadra datog na crtežu.

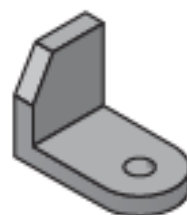
**Zadatak 2**

Nacrtaj tri projekcije datog 3D-oblika.

**Primjer 3**

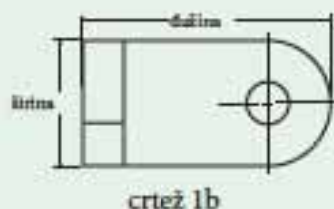
Ti si mašinski inženjer koji treba da pošalje uputstva radionici za izradu elementa za popravku neke mašine. Uputstva se sastoje od crteža u 3 projekcije radi precizne izrade traženog mašinskog elementa.

1. Nacrtaj dio u 3 projekcije.
2. Odgovori u kojim drugim oblastima iz svakodnevnog života, tehnike i nauke ima primjenu crtanje 3D-oblika u 3 projekcije?

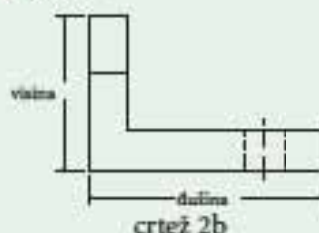


Rješenje:

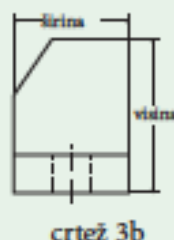
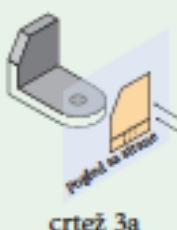
- 1) Projekciju koja se dobija pri pogledu odozgo ili plan dobijamo kada gledamo element (3D-oblik) odozgo i nacrtamo 2D-oblik koji se tom prilikom dobija. Ovo je prikazano na crtežu 1a. Na crtežu 1b, pak, data je prva projekcija (plan) mašinskog elementa.



Projekcija koja se dobija kada gledamo 3D-oblik sprijeda (frontalna projekcija) dobija se na način kako je prikazano na crtežu 2.



Projekcija koja se dobija kada gledamo 3D-oblik sa strane (profilna projekcija) dobija se na način kako je prikazano na crtežu 3.



- 2) Crtanje 3D-oblika u 3 projekcije ima široku primjenu u svakodnevnom životu, i to u arhitekturi, građevinarstvu, mašinstvu, umjetnosti.

Zadatak 3

Potrebno je novo uređenje tvoje učionice. Nacrtaj postojeći plan učionice, a zatim predloži novi, vodeći računa o funkcionalnosti inventara u njoj.

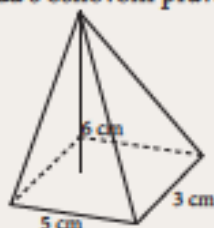
Da li se tri projekcije koje se koriste za predstavljanje 3D-oblika uvijek moraju crtati u stvarnoj veličini? Navedi nekoliko primjera da objasniš svoj odgovor.

1. Šta sam naučio/la o načinu predstavljanja 3D-oblika?
2. Gdje imam poteškoće u razumijevanju ili primjeni onoga što sam učio/la u ovoj lekciji?
3. Šta mogu da uradim da poboljšam svoje razumijevanje?

Samostalni rad

1. Nacrtaj u tri projekcije:

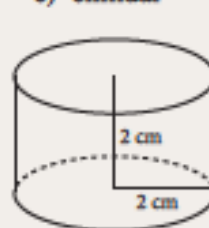
a) piramida s osnovom pravougaonik



b) konus



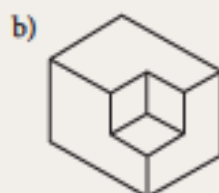
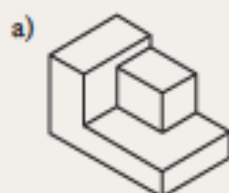
c) cilindar



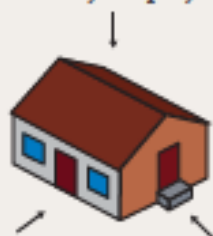
2. Nacrtaj u 3 projekcije dati 3D-oblik.



3. Nacrtaj u 3 projekcije mašinske dijelove:



4. Nacrtaj u 3 projekcije objekat dat na slici.



5. Nacrtaj plan i jednu bočnu projekciju svoje sobe. Na crtežu prikaži najmanje 3 elementa namještaja.

T E M A

3

ALGEBRA

$$2 + 2 = ?$$



$$x - y = ?$$



Algebra je kao igra zagonetki – koristimo slova i jednačine da otkrijemo koji se broj krije iza njih.

Pripremi se da otkrivaš, računaš i razmišljaš kao pravi matematičar.

„Matematika je kraljica nauka, a algebra je kraljica matematike.“

„Algebra je kao detektivska priča – brojevi su tragovi, a slova su tajne koje trebamo otkriti.“

Rezultati učenja

Nakon izučavanja ove teme bit ćeš sposoban/sposobna da:

- sastavljaš algebarske izraze i formule za rješavanje problema iz svakodnevnog konteksta;
- sastavljaš i rješavaš linearne jednačine s cijelobrojnim koeficijentima u datom kontekstu;
- generiraš nizove od cijelih brojeva i vizuelne prikaze te zapisuješ opći član niza;
- predstavljaš probleme iz svakodnevnih situacija linearnim funkcijama i crtaš njihove grafikone.

Osnove algebre. Članovi, izrazi i jednačine

Algebra je jedna od osnovnih grana matematike koja nam omogućava da radimo s brojevima, promjenljivim i matematičkim operacijama na apstraktnijem nivou. Osim brojeva, u algebri koristimo slova i simbole (na primjer, x , y , a , b , $+$, $-$, ...) da predstavimo nepoznate vrijednosti, što nam pomaže rješavati različite matematičke probleme.

U ovoj lekciji istraživat ćeš tri ključna elementa algebre: članove, izraze i jednačine. Naučit ćeš šta predstavljaju članovi jednog matematičkog izraza, kako prepoznavati i sastavljati algebarske izraze i jednačine – koje su osnovne alatke za računanje i modeliranje stvarnih situacija.

Ova osnova je važna jer je algebra prisutna u mnogim područjima nauke, tehnike, ekonomije i svakodnevnog života. Razumijevanje ovih koncepata pomoći će ti da razviješ logičko razmišljanje i vještine rješavanja problema.



Primjer 1

Marko želi kupiti sveske i olovke. U knjižari jedna bilježnica košta 50 denara, a jedna olovka 30 denara. On je kupio 3 bilježnice i 2 olovke. Koliko je novca Marko potrošio u knjižari?

Rješenje:

Da bi našao/našla ukupan iznos koji je Marko potrošio, računaš

$$3 \cdot 50 + 2 \cdot 30 = 150 + 60 = 210 \text{ denara.}$$

Zapis koji si koristio/la da izračunaš koliko je novca Marko potrošio sadrži brojeve i znakove za neke od operacija koje si učio/la. Taj zapis predstavlja brojni izraz. Dobijena vrijednost nakon izvršavanja svih operacija u izrazu zove se brojna vrijednost izraza.

Zadatak 1

Izračunaj brojne vrijednosti izraza:

- $120 - 17 + 78 : 3 + (60 - 400 : 10)$
- $88 + 24 : 6 - 48 + 2 \cdot 60$
- $((51 - 31) + 7) \cdot 5$

Primjer 2

Ana i Bojan štede novac svaki mjesec. Ana štedi x dinara mjesečno, a Bojan štedi 2 puta više od Ane.

- Koliko novca štedi Bojan?
- Zapiši izraz za ukupnu uštedevinu Ane i Bojana.
- Ako su njih dvoje zajedno uštedjeli 9000 dinara, zapiši jednačinu iz koje se može izračunati koliko štedi svako od njih.

Rješenje:

- Pošto Bojan štedi 2 puta više od Ane, to znači da njegova uštedovina iznosi: $2x$.
- Dakle, ukupna uštedovina Ane i Bojana je: $x + 2x$.
Članovi ovog izraza su x i $2x$.
Broj (konstanta) ispred promjenljive u svakom članu naziva se koeficijent tog člana.
Na primjer, za član $2x$ koeficijent je 2, a glavna vrijednost x ; za član x koeficijent je 1, a glavna vrijednost također x . Članovi x i $2x$ su slični jer imaju istu glavnu vrijednost. Član $-x$ je suprotan od x .
- Prema podacima u zadatku, njihova zajednička uštedovina je 9000 dinara, pa imamo $x + 2x = 9000$.

Promjenljiva je simbol (najčešće slovo) koji predstavlja broj što se može mijenjati ili je nepoznat. Na primjer, x , y , z , m , n ... su promjenljive.

Algebarski izraz je zapis od brojeva (konstanti) i promjenljivih povezan na odgovarajući način znakovima za matematičke operacije.

Primjeri izraza: $4x + 7$, $a^2 - 3a + 5$, $4x - 3y - 7$, $18m^3 - 5n^2 + p$, ...

Izrazi tipa $4x + 7$ i $4x + 3y - 7$ su linearni izrazi jer nemaju član u izrazu čiji je stepen veći ili manji od 1.

Dva algebarska izraza od kojih barem jedan sadrži promjenljivu (promjenljive) povezana znakom „ $=$ “ čine jednačinu.

Primjeri linearnih jednačina:

$2x + 5 = 11$, $y - 4 = 0$, $2a + 2b = 8$, $2x - y = 3y + 25$, ...

Zadatak 2

Koji od izraza su linearni?

- | | | |
|------------------|-------------------|---------------------|
| a) $4x + 3$ | b) $x^2 + 5x + 6$ | c) $3y^2 - 2xy + 4$ |
| d) $5a - 2b + 7$ | e) $2y + 10z - 3$ | f) $\sqrt{x} + 4$ |

Objasni zašto.

Zadatak 3

Zapiši tri izraza i tri jednačine. Za svaki izraz i jednačinu zapiši njihove članove.

Primjer 3

Napiši izraz koji pokazuje koliko ćeš platiti ako kupiš tri pakovanja mlijeka, svako po m denara, i četiri pakovanja soka, svako po s denara.

Rješenje:

Ako je cijena jednog pakovanja mlijeka m denara, a cijena jednog pakovanja soka s denara, tada ćeš za tri pakovanja mlijeka platiti: $3 \cdot m = 3m$.

Za četiri pakovanja soka platit ćeš: $4 \cdot s = 4s$.

Ukupan iznos koji ćeš platiti je: $3m + 4s$. Koji su članovi izraza?

Primjer 4

Bio si na pijaci i za jedan kilogram jabuka i dva kilograma narandži platio si 260 denara. Znaš da jedan kilogram jabuka košta 80 denara, ali ne znaš cijenu jednog kilograma narandži i želiš je izračunati. Kako bi ovo predstavio jednačinom?

Rješenje:

Nepoznatu cijenu 1 kilograma narandži označimo s x dinara, tada će 2 kg narandži koštati $2x$ denara. Cijena jednog kilograma jabuka je 80 denara, pa izraz za ukupni iznos koji će se platiti za 2 kg narandži i 1 kg jabuka bit će $2x + 80$. Taj iznos je zapravo potrošenih 260 denara, pa će konačna jednačina glasiti:

$2x + 80 = 260$. Koji su članovi jednačine koju si napisao?

Zadatak 4

Sastavi jednačinu za sljedeći problem: za tri majice po p dinara i pantalone od 1500 denara potrošeno je ukupno 3600 denara.

Zadatak 5

Sastavi jednačinu za sljedeći problem: dvije limenke soka po 30 denara i četiri pakovanja grickalica po y dinara koštaju 15 denara više od sedam pakovanja grickalica.

Koje su prednosti kada koristiš algebarske izraze i jednačine u svakodnevnom životu u poređenju s običnim računanjem?

U svoju svesku za DA zapiši primjer, a za NE se vrati na dio lekcije na koji se odnosi tvrdnja i ponovo razmotri primjer ili primjere.

1. Razumijem šta znače pojmovi član, izraz i jednačina. (Da/Ne)
2. Mogu sastaviti algebarske izraze koristeći promjenljive. (Da/Ne)
3. Znam sastaviti jednačinu za svakodnevni problem. (Da/Ne)

Samostalni rad

1. Petar ima x godina. Njegova sestra je 4 godine mlađa od njega. Sastavi izraz koji prikazuje njezinu uzrast.
2. Zbir dva broja je 56. Ako je jedan od brojeva x , sastavi izraz kojim se predstavlja drugi broj.
3. Nastavnica ima c čokolada i želi ih ravnomjerno podijeliti na 5 učenika. Sastavi izraz koji pokazuje količinu koju će dobiti svaki učenik.
4. a) Ako je jedan broj 3 puta veći od drugog broja x , sastavi izraz koji predstavlja veći broj.
b) Ako je jedan broj 4 puta manji od drugog broja y , sastavi izraz koji predstavlja manji broj.
5. Jedan automobil troši y litara goriva na 100 kilometara. Ako tim automobilom pređeš 300 kilometara, sastavi algebarski izraz za ukupnu potrošnju goriva.
6. U prodavnici si kupio 4 kilograma jabuka po a dinara za kilogram i 2 kilograma banana po b dinara za kilogram. Sastavi izraz za ukupnu cijenu koju treba da platiš.
7. a) Sastavi izraz kojim ćeš predstaviti koliki je kusur koji treba da dobiješ kada banknotom od 500 dinara plaćaš 3 soka po x dinara.
b) Sastavi izraz kojim ćeš predstaviti koliki je kusur koji treba da dobiješ kada banknotom od 500 dinara plaćaš 3 soka po x dinara i 4 devreka po y dinara.
8. Sastavi jednačinu kojom ćeš prikazati sljedeći problem: zbir dva broja je 87, a jedan broj je za 5 veći od drugog.
9. Visina jedne zgrade je h metara, a druga zgrada je 30 metara viša od nje. Ako je zbir njihovih visina 150 metara, sastavi jednačinu za određivanje visine.
10. Jedna porodica plaća x dinara za struju, što je trostruko više od sume koju plaća za vodu. Ako ukupni troškovi za ove dvije račune iznose 24 000 denara, sastavi jednačinu da nađeš sumu koju plaćaju za vodu.
11. Marko ima osnovnu mjesečnu platu od p denara. Osim toga, dobija bonus od 10% od plate i još 5000 denara za dodatni rad. Ako je zaradio ukupno 51 200 denara, sastavi jednačinu da nađeš njegovu osnovnu platu.

Pojednostavljivanje linearnog izraza. Računanje vrijednosti

U ovoj lekciji naučit ćeš kako koristiti redoslijed algebarskih operacija da pojednostavljuješ izraze, što je ključno za pravilno rješavanje matematičkih zadataka. Prvo ćeš se fokusirati na sabiranje sličnih članova, što je važan korak u procesu pojednostavljivanja izraza. Zatim ćeš naučiti kako množiti izraze konstantama izvan zagrade i kako te operacije utječu na krajnji rezultat. Sljedeće, razmotrit ćeš koncept računanja vrijednosti izraza s promjenljivima kada su za njih date konkretne vrijednosti. Ovo će ti pomoći da razumiješ kako se matematika može primijeniti na rješavanje stvarnih problema i da razviješ vještine za tačne proračune.



Primjer 1

Ilir prodaje tri različite vrste voća po sljedećim cijenama:

kilogram jabuka košta $4x$ denara,
kilogram krušaka košta $3x$ denara,
kilogram narandži $2x$ denara,
kesa za pakovanje voća košta 5 denara.

Sastavi algebarski izraz koji predstavlja ukupnu cijenu za kupovinu po 1 kg voća od tri vrste koje će biti upakovano u kesu.

Rješenje:

Ukupna cijena bit će predstavljena sljedećim algebarskim izrazom:
 $4x + 3x + 2x + 5$.

Zadatak 1

Marija je kupila 2 knjige. Cijena jedne knjige je $2x$ denara, a za dostavu knjiga platila je dodatnih x denara. Koliko ukupno denara treba da plati Marija za dvije knjige i dostavu?

Primjer 2

Uprosti linearni izraz iz primjera 1 i izračunaj vrijednost izraza kada je $x = 10$.

Rješenje:

Uprostiti znači obaviti operacije između sličnih članova, odnosno sabiranje sličnih članova sa x ($4x$, $3x$ i $2x$)

$$4x + 3x + 2x + 5 = 9x + 5 - \text{uprošten izraz.}$$

Za računanje vrijednosti izraza kada je $x = 10$, pišemo vrijednost 10 umjesto x i dobijamo

$$9x + 5 = 9 \cdot 10 + 5 = 90 + 5 = 95.$$

Dakle, vrijednost izraza $9x + 5$ za $x = 10$ je 95.

Primjer 3

Uprosti sljedeći linearni izraz: $3 \cdot (2y + 4)$. Zatim izračunaj vrijednost izraza kada je $y = 2$.

Rješenje:

Za uprošćavanje izraza, prvo treba da se oslobodiš od zagrada i da primjeniš algebarske operacije

$$3 \cdot (2y + 4) = 6y + 12.$$

Za računanje vrijednosti izraza ako je $y = 2$, dobijamo $6y + 12 = 6 \cdot 2 + 12 = 12 + 12 = 24$.

Primjer 4

Uprosti izraz $-2 \cdot (3x + 5) - 4x + 3$ i izračunaj njegovu vrijednost kada je $x = -3$.

Rješenje:

Prilikom uprošćavanja izraza najprije se oslobodimo od zagrada, a onda sabiramo slične članove (kako su obilježene podvlačenjem).

$$-2 \cdot (3x + 5) - 4x + 3 = \underline{-6x} \underline{-10} \underline{-4x} \underline{+3} = -10x - 7$$

Sada u uprošćenom izrazu zamjenjujemo vrijednost x , odnosno $x = -3$ i dobijamo

$$-10x - 7 = -10 \cdot (-3) - 7 = 30 - 7 = 23.$$

Zadatak 2

Uprošćavanje izraza počinje oslobađanjem od zagrada, a onda sabiramo slične članove (onako kako su podvučeni).

a) $4x + 3 - 2x + 7$, $x = 5$

b) $3a - 4a + 2a + 5$, $a = 3$

c) $2x - 7 + x - 9y + 7$, $x = 1$, $y = -1$

d) $4(x + 3) - 2(x - 1)$, $x = 2$

e) $2(y + 4) - 3(y - 2)$, $y = -3$

Primjer 5:

Marjan je otišao kupiti sveske i hemijske olovke za novu školsku godinu. Cijena jedne sveske je t denara, a cijena jedne hemijske olovke je p denara. On je kupio 3 sveske i 2 hemijske olovke. Kasnije je odlučio kupiti još 2 sveske i 1 hemijsku olovku.

- Sastavi algebarski izraz koji pokazuje ukupnu cijenu koju je platio Marjan.
- Uprosti izraz.
- Izračunaj ukupnu sumu ako jedna sveska košta 80 denara, a jedna hemijska olovka 50 denara.

Rješenje:

- Sastavljanje izraza: $3t + 2p + 2t + p$.
- Uprošćavanje izraza: $3t + 2p + 2t + p = (3t + 2t) + (2p + p) = 5t + 3p$.
- Računanje ukupne sume, odnosno vrijednosti izraza za date vrijednosti promjenljivih: ako je $t = 80$, $p = 50$, tada $5t + 3p = 5 \cdot 80 + 3 \cdot 50 = 400 + 150 = 550$ denara.
Znači, Marjan je potrošio 550 denara za sveske i hemijske olovke.

Zadatak 3

Aleksandra trenira plivanje. U prva 4 dana plivala je po d metara dužine. Zatim je u naredna 3 dana svakog dana plivala po 5 metara više nego u prva četiri dana.

- Sastavi algebarski izraz koji pokazuje ukupan broj metara koje je isplivala za ovih 7 dana.
- Uprosti izraz.
- Izračunaj ukupan broj isplivanih metara ako je svakog dana u prva 4 dana plivala po 200 metara.

Zašto je važno da poštujemo redoslijed algebarskih operacija pri uprošćavanju izraza? Koje korake treba da slijediš kada rješavaš složen matematički izraz sa zagradama i različitim operacijama? Objasni proces.

Kako možeš koristiti algebarske izraze u svakodnevnim situacijama, kao što su kupovina, sport ili planiranje vremena? Da li je lakše najprije pojednostaviti algebarski izraz prije nego što se izračuna njegova vrijednost? Objasni zašto.

Precrtaj tabelu u svoju svesku i ocijeni svoja znanja. Podijeli tabelu sa svojim školskim drugovima.

	Potpuno razumijem	Djelimično razumijem	Ne razumijem
Mogu uprostiti linearni izraz sabiranjem sličnih članova.			
Mogu množiti sa konstantom van zagrade.			
Mogu izračunati vrijednost linearnog izraza za datu vrijednost promjenljive.			

Samostalni rad

1. Uprosti izraz

- a) $3(2x + 4) - 5x$ b) $5(a - 2) + 3(2a + 1)$ c) $2(3m - 4) - 4(m + 5)$
 d) $4(2x - 3) + 5(1 - x)$ e) $5(2 - y) - 3(4y - 1)$

2. Izračunaj:

- a) $4y - 7 + 2(y + 3)$ za $y = 2$ b) $7 - 3x + 2(4 - x)$ za $x = -1$
 c) $3(2k + 1) - 4(k - 2)$ za $k = 3$ d) $2(3p - 4) + 3(2 - p)$ za $p = 0$
 e) $6 - 2(3x - 4) + x$ za $x = 2$

3. Jovan radi za stranu firmu i zarađuje 50 eura za 1 sat. Napiši izraz koji predstavlja njegovu mjesečnu zaradu ako radi x sati mjesečno. Izračunaj njegovu mjesečnu zaradu ako radi 160 sati mjesečno.
4. Amra prodaje ručno izrađen nakit. Jedan derdan prodaje za 25 eura. Napiši izraz koji predstavlja mjesečni iznos za x prodatih derdana. Izračunaj mjesečni iznos ako proda 50 derdana mjesečno.
5. Aleks putuje automobilom koji troši 8 litara goriva na 100 kilometara. Ako je put dug 400 kilometara, a cijena goriva je x dinara po litru, napiši linearni izraz koji predstavlja ukupnu cijenu goriva za putovanje. Izračunaj ukupnu cijenu goriva za put od 400 km ako 1 litar košta 80 denara.
6. U prodavnici cijena jednog proizvoda je 15 eura. Napiši linearni izraz koji predstavlja ukupnu cijenu za x proizvoda. Izračunaj ukupnu cijenu ako kupiš 10 proizvoda.

7. Merita želi ići na putovanje i ima 200 eura. Svakog dana putovanja trošila bi 30 eura za hranu i 20 eura za prevoz. Napiši izraz koji predstavlja ukupnu potrošnju poslije x dana. Izračunaj ukupnu potrošnju ako putovanje traje 5 dana. Da li bi Meritinih 200 eura bilo dovoljno?
8. Marija ima mjesečni prihod od 40 000 denara. Ona troši 7000 denara za stan, x dinara za odjeću, $2x$ denara za prevoz i $3x$ denara za hranu mjesečno. Napiši izraz koji predstavlja ukupnu Marijinu potrošnju i izraz za ostatak mjesečnog prihoda. Izračunaj ukupnu mjesečnu potrošnju Marije ako za odjeću troši 3000 denara. Da li će Marija imati uštedevinu u mjesecu kada za odjeću potroši 3000 denara?
9. U botaničkoj bašti bilo je y korijena begonija, 3 puta više lavande, $3y - 4$ korijena ljubičica i žalfije 2 puta više nego ljubičica. Zapiši izraz koliko je korijena ostalo u botaničkoj bašti ako se $7y$ korijena osušilo.

Formule. Izražavanje jedne promjenljive preko druge

Formule su alati koji će ti omogućiti lako i brzo rješavanje problema. Kada koristiš promjenljive, možeš izraziti veze među različitim veličinama. U ovoj lekciji naučit ćeš kako sastavljati jednostavne formule i izraziti jednu promjenljivu preko druge. Naučit ćeš kako primijeniti ova znanja u svakodnevnim situacijama, kao što su izračunavanje cijene, brzine ili vremena. Ove vještine koriste se ne samo u matematici, nego i u raznim oblastima kao što su fizika, ekonomija i inženjerstvo, gdje se često susrećemo sa situacijama koje zahtijevaju takve proračune.

$$\text{Vrijeme} = \frac{\text{udaljenost}}{\text{brzina}}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Primjer 1

Ako Dimitar čita 20 stranica na dan, napiši izraz koji predstavlja broj stranica koje će Dimitar pročitati za x dana.

Rješenje:

Broj pročitanih stranica nakon x dana dat je izrazom: $20x$. Ako ukupni broj pročitanih stranica označimo slovom B , dobijamo $B = 20x$.

Primjer 2

Petar je 23 godine stariji od Selme. Petar ima p godina, a Selma ima s godina. Sastavi formulu koja povezuje godine s i p .

Rješenje:

Ako godine zapišemo algebarski datim slovima, odnosno promjenljivim, imamo: $p = s + 23$. Ova formula daje vezu između godina Petra i Selme.

Formula je precizan način povezivanja promjenljivih odgovarajućim matematičkim operacijama za datu situaciju (zadatak). Formule se često koriste za izražavanje opštih pravila ili zakonitosti u matematici, u drugim naukama, pa čak i u svakodnevnom životu.

Primjer 3

Jedna knjiga košta 170 denara, a jedan časopis 50 denara. Napiši formulu za ukupnu cijenu s , u denarima, koja treba da se plati pri kupovini x knjiga i y časopisa.

Rješenje:

Ukupna cijena = ukupna cijena knjiga + ukupna cijena časopisa.

Ukupna cijena knjiga je $170 \cdot x = 170x$. Ukupna cijena časopisa je $50 \cdot y = 50y$.

Formula za ukupnu cijenu glasi $S = 170x + 50y$.

Primjer 4

Izrazi stranicu jednakostraničnog trougla a preko obima L .

Rješenje:

Obim jednakostraničnog trougla je $L = 3a$, pa ako želimo izraziti stranicu preko njene veze s obimom, dobijamo $aa = \frac{L}{3}$. Ako je dat obim trougla, na primjer $L = 75$ cm, tada je stranica $a = \frac{75}{3} = 25$ cm.

Zadatak 1

Godine majke su zbir godina sina i kćerke. Zapiši formulu koja izražava godine majke preko godina sina i kćerke. Zatim izrazi godine sina preko godina majke i sestre.

Zadatak 2

Sastavi formulu za obim L jednakokrakog trougla s osnovicom a i krakom b , a zatim:

- a) izrazi osnovu preko ostalih promjenljivih u formuli.
b) izrazi krak preko ostalih promjenljivih u formuli.

Primjer 5

Luka putuje taksijem do aerodroma, ali nije siguran hoće li imati dovoljno sredstava za prevoz. Zna da taksi-kompanija naplaćuje fiksni trošak (start) od 80 denara i 50 denara po prijedenom kilometru. Ako je broj prijedjenih kilometara označen s k , a ukupna cijena prevoza s C :

- a) zapiši formulu prema kojoj se računa ukupna cijena prevoza C ,
b) izrazi broj kilometara k preko ostalih promjenljivih u formuli,
c) da li će Luki biti dovoljna 4000 dinara za prevoz ako treba preći 70 kilometara taksijem do aerodroma?

Rješenje:

- a) Ukupna cijena prevoza = trošak starta + trošak prijedjenih kilometara.
Trošak prijedjenih kilometara = cijena za 1 kilometar · broj kilometara = $50 \cdot k$.
Konačno, $C = 80 + 50k$.
- b) Da bismo izrazili broj kilometara k , prvo oduzmemo 80 s obje strane formule:
Imamo $C - 80 = 80 + 50k - 80$, odnosno podijelimo s $C - 80 = 50k$.
Zatim dijelimo sa 50, odnosno $50k : 50 = (C - 80) : 50$ i dobijamo $k = \frac{C-80}{50}$.
- c) Ovdje se zapravo pita koliko kilometara Luka može prijeći s 4000 denara. Uvrstavamo $C = 4000$ u formulu iz tačke b), $k = \frac{4000-80}{50} = \frac{3920}{50} = 78,4 \text{ km} > 70 \text{ km}$, znači Luka ima dovoljno novca da plati taksi do aerodroma.
(drugi način, koliko novca treba Luka za taksi za udaljenost od 70 km;
 $80 + 70 \cdot 50 = 3580 < 4000$).

Zadatak 3

U jednoj kompaniji za proizvodnju košulja cijena jedne košulje je 800 denara. Fiksni troškovi za proizvodnju košulja iznose 12 000 denara mjesečno, a promjenljivi troškovi po košulji su 300 denara. Napiši formulu koja predstavlja ukupnu mjesečnu sumu C (u denarima) za proizvodnju x košulja. Zatim izrazi promjenljivu x preko C .

Zadatak 4

Formula za izračunavanje ploštine kvadrata je $P = a^2$, gdje je P ploština, a a dužina stranice. Izrazi stranicu a preko ploštine P . Zatim, ako je $P = 49 \text{ cm}^2$, izračunaj stranicu kvadrata.

U svoju svesku za DA zapiši primjer, a za NE se vrati na dio lekcije na koji se odnosi tvrdnja i ponovo razmotri primjer(e).

1. Znam sastaviti jednostavne formule. (Da/Ne)
2. Mogu izraziti jednu promjenljivu preko druge u formuli. (Da/Ne)
3. Razumijem formule i njihovu primjenu u svakodnevnim situacijama. (Da/Ne)

Samostalni rad

1. Zamislite da kupuješ nekoliko kilograma jabuka. Ako je cijena 1 kg c , a kupuješ k kilograma, kako ćeš izračunati ukupnu cijenu? Napiši formulu koja pokazuje vezu između ukupne cijene (C), cijene za 1 kg (c) i količine (k).
2. U jednoj voćnjaku bilo je 30 sanduka sa sadnicama stabala. U svakom sanduku bilo je po x stabala. Zbog loših vremenskih uvjeta i neblagovremene zaštite, svake sedmice se suše po 3 stabla. Sastavi formulu kojom će se izračunavati ukupan broj zdravih stabala V nakon m sedmica.
3. Putuješ automobilom. Formula za brzinu je: $v = \frac{S}{t}$, gdje je v brzina, S rastojanje, a t vrijeme. Izrazi vrijeme (t) preko rastojanja (S) i brzine (v).
4. U hemijskoj reakciji temperatura supstance povećava se svaki sat za 2°C . Ako je početna temperatura T^0 , napiši formulu koja predstavlja temperaturu T nakon x sati. Zatim izrazi promjenljivu x preko T .
5. Na jednoj farmi broj životinja svakog mjeseca se povećava za 12. Ako je početni broj životinja m , napiši formulu koja predstavlja broj životinja n nakon x mjeseci. Zatim izrazi promjenljivu x preko n .
6. Enes je iznajmio štand za prodaju suvenira. Fiksni troškovi iznajmljivanja štanda iznose 1500 denara mjesečno, a dobit koju Enes ima za 1 prodani suvenir je 20 denara.
 - a) Napiši formulu koja predstavlja zaradu C (u denarima) Enesa od prodaje x suvenira.
 - b) Izrazi promjenljivu x preko C .
 - c) Koliko najmanje suvenira Enes mora prodati da bi mogao platiti fiksne mjesečne troškove?
7. Izrazi dužinu a pravougaonika:
 - a) iz formule za obim $L = 2a + 2b$,
 - b) iz formule za površinu $P = a \cdot b$.

Linearna jednačina s jednom nepoznatom.

Rješenje jednačine

U svakodnevnom životu često se susrećeš sa situacijama u kojima treba da izračunaš nepoznatu vrijednost, na primjer, koliko novca ti nedostaje da kupiš nešto, koliko će ti vremena trebati da stigneš do neke destinacije, koliko jedinica nekog proizvoda treba da kupiš da bi potrošio određenu sumu i slično.

Navedeni problemi mogu se riješiti pomoću linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} \text{🍌} + \text{🍌} + \text{🍌} &= 21 \\ \text{🍌} + \text{🍌} + \text{🍌} &= 13 \\ \text{🍌} + \text{🍌} + \text{🍌} &= 18 \\ \text{🍌} - \text{🍌} + \text{🍌} - \text{🍌} &= ? \end{aligned}$$

Primjer 1

- a) Data je jednačina $2x + 5 = 11$. Provjeri za koje vrijednosti x iz skupa $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ jednačina prelazi u tačnu brojnu jednakost.

Rješenje:

Direktnom zamjenom svake od vrijednosti za x iz skupa dobijaju se 5 različitih brojčanih jednakosti, od kojih je samo jedna tačna. Za tu vrijednost x kažemo da je rješenje jednačine $2x + 5 = 11$.

Vrijednost za x	Brojna jednakost	Tačno/ netačno	Rješenje
$x = -1$	$2 \cdot (-1) + 5 = 11$	netačno	Ne
$x = 0$	$2 \cdot 0 + 5 = 11$	netačno	Ne
$x = 1$	$2 \cdot 1 + 5 = 11$	netačno	Ne
$x = 2$	$2 \cdot 2 + 5 = 11$	netačno	Ne
$x = 3$	$2 \cdot 3 + 5 = 11$	tačno	Da

Vrijednost promjenljive za koju jednačina prelazi u tačnu brojčanu jednakost naziva se rješenje jednačine.

Zadatak 1

Provjeri da li:

- a) $x = 3$ je rješenje jednačine $3x + 10 = 1$ b) $x = -2$ je rješenje jednačine $x^2 = 4$
 c) $x = 2$ je rješenje jednačine $x^2 = 4$ d) $x = -\frac{2}{3}$ je rješenje jednačine $3 - 5x = x + 7$

Zadatak 2

Za koje vrijednosti x je brojna vrijednost izraza $x - 1$ jednaka:

- a) 0 b) 5 c) -6

Primjer 2

Riješi jednačinu $7x + 4 = 9 - 3x$.

Rješenje:

Pri rješavanju linearnih jednačina koristimo inverzne operacije, čime jednačinu dovodimo u oblik $x = a$.

U ovom slučaju, najprije na obje strane jednačine dodamo $3x$, zatim oduzmemo 4, a na kraju podijelimo s 10.

$$7x + 4 = 9 - 3x \quad | +3x$$

$$7x + 4 + 3x = 9 - 3x + 3x$$

$$10x + 4 = 9 \quad | -4$$

$$10x + 4 - 4 = 9 - 4$$

$$10x = 5 \quad | : 10$$

$$x = 5 : 10$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Kako ćeš provjeriti da je $x = \frac{1}{2}$ rješenje jednačine $7x + 4 = 9 - 3x$?

Primjer 3

Riješi jednačinu $2(x - 3) + 4 = 10 - 3(x - 1)$.

Rješenje:

Najprije se oslobodimo od zagrade, a zatim postupamo slično kao u prethodnom primjeru:

$$2(x - 3) + 4 = 10 - 3(x - 1)$$

$$2x - 6 + 4 = 10 - 3x + 3$$

$$2x - 2 = 13 - 3x \quad | +3x + 2$$

$$2x + 3x = 13 + 2$$

$$5x = 15 \quad | : 5$$

$$x = 3$$

Objasni zašto.

Zadatak 3

Riješi jednačine i uradi provjeru rješenja:

- a) $7x + 4 = -38$ b) $3(2x - 4) = 5x + 1$ c) $3(x + 1) + 5 = 8 - 2(x - 5)$

Primjer 4

Martina ima 250 dinara i želi kupiti nekoliko pakovanja grickalica. Jedno pakovanje grickalica košta 40 dinara. Ona želi izračunati koliko pakovanja može kupiti ako joj nakon kupovine treba ostati 30 dinara za autobusku kartu.

Rješenje:

Zadatak ćemo riješiti najprije sastavljanjem jednačine, a zatim i njenim rješavanjem.

Neka je x broj pakovanja koji treba odrediti. Prema uslovima zadatka, za x pakovanja grickalica ukupna suma koju će Martina potrošiti je $40x$, a ostatak je 30 dinara.

Budući da je u početku imala 250 dinara, možemo sastaviti sljedeću jednačinu: $250 - 40x = 30$.

Sljedeći korak je rješavanje jednačine da bismo odgovorili na pitanje koliko pakovanja grickalica može kupiti Martina.

$$250 - 40x = 30 \quad | -250$$

$$-40x = 30 - 250$$

$$-40x = -220 \quad | : (-40)$$

$$x = 5,5$$

Za broj pakovanja iz jednačine dobija se 5,5, ali budući da Martina ne može uzeti pola pakovanja, ona će kupiti 5 pakovanja. Na kraju će joj ostati $250 - 40 \cdot 5 = 50$ dinara, pa će na taj način sigurno imati novac i za autobusku kartu.

Zadatak 4

Jedna škola organizira ekskurziju, a cijena prevoza po učeniku je 300 dinara. Osim toga, za sve učenike treba platiti i ukupnu fiksnu sumu od 5000 dinara za vodiča. Ukupna suma koja treba da se plati za izlet je 23 000 dinara. Koliko učenika će ići na izlet?

Kako možeš prepoznati kada se neki problem iz stvarnog života može riješiti linearnom jednačinom? Da li rješenje jednačine uvijek ima smisla u stvarnom kontekstu? Objasni s primjerom. Možeš li osmisliti drugi primjer iz svakodnevnog života u kojem ćeš koristiti linearnu jednačinu da izračunaš nepoznatu vrijednost? Kako možeš provjeriti da je tvoje rješenje jednačine tačno?

Odgovori na pitanja u svoju svesku. Podijeli odgovore sa svojim školskim drugovima.

1. Razmisli: Mogu li sastaviti linearnu jednačinu za problem iz svakodnevnog života?
2. Riješi: Znam li rješavati jednačinu korak po korak?
3. Provjeri: Mogu li provjeriti tačnost svog rješenja zamjenom?
4. Primijeni: Mogu li osmisliti svoj problem koji se rješava linearnom jednačinom?

Samostalni rad

1. Data je jednačina: $5x - 7 = 18$. Je li $x = 5$ rješenje jednačine?
- 2.*. Riješi jednačine: a) $2x + 5 = 3x - 7$ b) $0 \cdot y + 9 = 0$ c) $0 \cdot z + 0 = 0$
3. Ana i Bojan zajedno imaju 56 knjiga. Ana ima 8 knjiga više od Bojana. Zapiši jednačinu koja predstavlja ovaj problem.
4. Lirim je zamislio broj takav da, kada se pomnoži s 3 i potom doda 5, rezultat je 20. Koji je broj Lirim zamislio?
5. Marko je kupio 4 kutije s bombonama tako da je u svakoj kutiji bilo po x bombona. Zatim je pojео 6 bombona i ostalo mu je 34. Koliko je bombona bilo u svakoj kutiji?
6. U jednom restoranu cijena pizze i soka je 540 dinara. Ako pizza košta tri puta više od soka, koliko košta sok?
7. Obim pravougaonika je 48 cm. Dužina je tri puta veća od širine. Kolike su dužina i širina pravougaonika?
8. U igri s loptom, Janko i Slavko dogovorili su sljedeća pravila: za svaki pogodak na koš dobijaju 3 poena, a za promašaj gube 2 poena. Janko kaže da je Slavko osvojio 33 poena nakon 16 pokušaja na koš, ali ne zna koliko je puta pogodio, a koliko puta promašio. Pomozi im da riješe problem (sastavi jednačinu, riješi je i provjeri da li je tvoje rješenje tačno).
9. Plaćaš mjesečni paket za telefon od 1000 denara i svaka minuta razgovora preko paketa naplaćuje se 5 denara. Ako račun za ovaj mjesec iznosi 1150 denara, koliko si minuta razgovarao preko paketa? Sastavi jednačinu, riješi je i objasni korake.
10. U jednoj prodavnici, jakna i pantalone zajedno koštaju 6500 denara. Jakna košta 500 dinara više od dvostruke cijene pantalona. Koliko košta svaki proizvod?
11. Andrej je kupio 3 para sportskih patika i jedan ranac. Svaki par patika košta isto, a ranac je 800 denara skuplji od dvostruke cijene jednog para. Ako je platio ukupno 14 600 denara, koliko košta jedan par patika?
12. Mihaela je putovala vozom i autobusom. Rastojanje koje je prešla autobusom, uvećano za 80 kilometara, tri puta je manje od rastojanja koje je prešla vozom. Ako je ukupno rastojanje bilo 560 km, koliko je kilometara Mihaela prešla svakim prevozom?
13. U jednom fabričkom rezervoaru ima 120 litara vode. Svakog sata u njega ulazi tri puta više litara nego što istječe, a pored toga se svakog sata dodatno dodaje 40 litara. Ako nakon 6 sati rezervoar sadrži 900 litara, koliko litara vode ulazi i istječe u jednom satu?

Nizovi cijelih brojeva

Zamisli da organiziraš rođendansku zabavu, uređuješ prostor i treba da izračunaš koliko gostiju može sjesti za 4 spojena stola, 5 stolova... (kao što je prikazano na slici). Postoji li veza između broja spojenih stolova i broja stolica oko njih? Postoji li veza između svakog narednog slaganja stolica i prethodnog? U ovoj lekciji naučit ćeš kako da poredaš brojeve i crteže, da otkriješ kako funkcioniraju redoslijed brojeva ili crteža. Istraživat ćeš kako se dobija svaki sljedeći broj ili vizuelni prikaz, šema u datom nizu i kako da nađeš koji broj stoji na određenoj poziciji.



Primjer 1

Amina štedi svaki dan. Prvog dana uštedjela je 5 denara, drugog dana imala je 10 denara, a trećeg dana njena uštedevina bila je 15 denara. Ako nastavi tako svaki dan, koliko će ukupno denara imati uštedeno petog dana?

Rješenje:

Primjećujemo da Amina svakog dana dodaje po 5 denara na prethodni iznos:

- Prvi dan: 5 denara
- Drugi dan: 10 denara ($5 + 5$)
- Treći dan: 15 denara ($10 + 5$)
- Četvrti dan: 20 denara ($15 + 5$)
- Peti dan: 25 denara ($20 + 5$)

Dakle, petog dana Amina će imati 25 denara.

Ovaj način zapisivanja brojeva u određenom redoslijedu pomoći će ti da razumiješ šta je niz i kako možeš otkriti njegove članove.

Zadatak 1

Broji po 4, počevši od: a) -5 b) -2 c) 1 .

Koji će biti šesti član?

Primjer 2

- a) Dati su brojevi: 5, 8, 11, 14, 17. Koji je sedmi broj?
 b) Koje je pravilo po kojem se određuje svaki sljedeći broj?

Rješenje:

- a) Prvi broj (a_1): 5,
 drugi broj (a_2): $5+3$,
 treći broj (a_3): $5+3+3$,
 četvrti broj (a_4): $5+3+3+3$,
 peti broj (a_5): $5+3+3+3+3$,
 šesti broj (a_6): $5+3+3+3+3+3$,
 sedmi broj (a_7): $5+3+3+3+3+3+3$.
 Dakle, sedmi broj je 23.

Poredani brojevi ili crteži (šeme) koji su povezani određenim pravilom zovu se niz. Brojeve, šeme ili vizuelne prikaze (crteže) u jednom nizu zovemo članovima niza.

Članove u nizu označavamo sa $a_1, a_2, a_3, \dots$ gdje indeks (mali brojčić desno od slova a) pokazuje na kojem mjestu se član nalazi u nizu.

- b) Svaki član niza 5, 8, 11, 14, 17, ... veći je za 3 od prethodnog. Dakle, brojevi se dobijaju dodavanjem 3.

Pravilo za određivanje sljedećeg člana niza je „dodaj 3“.

Možeš primijetiti da se svaki naredni član niza dobija dodavanjem broja 3 više puta.

Ako član koji je n -ti po redoslijedu u nizu, odnosno n -ti član, označimo sa a_n , možemo zapisati: $a_n = 5 + 3 \cdot (\text{broj dodanih trojki})$. Iz primjera pod a) uočavamo: na drugi član dodaje se jedna trojka, na treći dvije trojke, na četvrti tri trojke itd.

Dakle, na n -ti član doda se $(n - 1)$ trojki. Možemo zapisati formulu za određivanje svakog člana (opći član) niza: $a_n = 5 + 3 \cdot (n - 1)$. Možemo provjeriti funkcionira li formula.

Naime, za sedmi član pod a) dobili smo 23.

Prema formuli: $a_7 = 5 + 3 \cdot (7 - 1) = 5 + 3 \cdot 6 = 5 + 18 = 23$.

Primjer 3

Na sljedećoj slici prikazane su grupe zvjezdica:

*
**

- a) Koliko zvjezdica će biti u šestoj grupi? b) Kako bi izgledala deseta grupa?

Rješenje:

- a) Ako prebrojiš zvjezdice u svakoj grupi, dobijaš niz: 1, 2, 3, 4, 5, ...
Možeš uočiti da svaka nova grupa sadrži jednu zvjezdicu više od prethodne. Dakle, šesti član imat će 6 zvjezdica.
Pravilo za određivanje broja zvjezdica u sljedećoj grupi je „dodaj 1“.
- b) Za 10. grupu bit će 10 zvjezdica, odnosno broj zvjezdica u n -toj grupi je $a_n = n$, gdje je n broj grupe, a a_n broj zvjezdica u njoj.

Zadatak 1

Opći član jednog niza dat je formulom $a_n = 2n$. Koliki je peti član, odnosno a_5 ?

Primjer 4:

Marko je počeo slagati stolice u koncertnoj sali. U prvom redu ima 4 stolice, u drugom redu 7, u trećem 10, u četvrtom 13...

- a) Koliko stolica će biti u šestom redu?
b) Koliko stolica će biti u dvanaestom redu?
c) Zapiši formulu za opći član prema kojoj možeš izračunati broj stolica u bilo kojem redu.
d) Ako umjesto brojeva predstaviš ovaj niz crtežom, kako bi izgledala prva četiri reda?

Rješenje:

- a) Ako zapišeš broj stolica u svakom redu, dobit ćeš: 4, 7, 10, 13, ...
Uočavaš da svaki red ima 3 stolice više od prethodnog.
U petom redu ima 16 stolica ($13 + 3$), a u šestom redu 19 stolica ($16 + 3$).
- b) Dvanaesti član ima $4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 4 + 33 = 37$.
- c) Formula za opći član niza je: $a_n = 4 + 3(n - 1)$. Zašto? Vрати se na primjer 2 pod a).
- d) Ako niz prikažeš crtežima, izgledat će ovako:
- Red 1: 
- Red 2: 
- Red 3: 
- Red 4: 

Zadatak 2

Orhan je odlučio štedjeti novac svake sedmice. Prve sedmice uštedio je 50 denara, druge sedmice 80 denara, treće sedmice 110 denara, četvrte 140 denara i tako dalje.

- Koliko će novca uštedjeti u osmoj sedmici ako nastavi štedjeti prema zadatoj šemi?
- Koliko će ukupno novca imati uštedeno nakon deset sedmica?
- Napiši formulu po kojoj se može izračunati koliko će Orhan uštedjeti u bilo kojoj sedmici.
- Kako bi ovo izgledalo vizuelno ako ga prikazemo redovima novčića?

Na slici je prikazano slaganje stolica oko pravougaonih stolova njihovim spajanjem. Koliko stolova treba spojiti da bi moglo sjesti 30 gostiju?



U svoju svesku za DA zapiši primjer, a za NE se vrati na dio lekcije na koji se odnosi tvrdnja i ponovo razmotri primjer(e).

Mogu odrediti članove niza prema datom pravilu. a) Da b) Ne

Mogu naći član na datoj poziciji. a) Da b) Ne

Mogu naći pravilo za niz s cijelim brojevima. a) Da b) Ne

Samostalni rad

- Niz brojeva koji se pojavljuju na brojčaniku lifta u jednoj zgradi je 0, 3, 6, 9, 12, ...
 - Odredi prema kojem pravilu je sastavljen niz.
 - Ako je najviši sprat zgrade 74, hoće li on biti ispisan na brojčaniku lifta? Da li su svi spratovi u zgradi prikazani na brojčaniku?
- Zapiši novu nizu pojavljivanja brojeva na brojčaniku lifta, počevši s podzemnom garažom zgrade koja bi bila označena sa -2 i pravilom niza koje ćeš sam odrediti.
- Za svaki od nizova:

a) 69, 62, 55, 48, ...	b) $-17, -13, -9, -5, \dots$
c) 11, 7, 3, $-1, \dots$	d) $-5, -8, -11, -14, \dots$

 zapiši pravilo za određivanje sljedećeg člana niza i zapiši sljedeća tri člana.



3. Svakog dana u školskoj trpezariji dodavalo se 10 obroka više. Prvog dana ima 50 obroka.
 - a) Zapiši niz za prvih pet dana.
 - b) Zapiši opći član niza.
4. Tvoja omiljena videoigra ima nivoe koji se povećavaju po težini prema nizu: 3, 10, 17, 24, ...
 - a) Pronađi pravilo prema kojem se povećava težina nivoe u videoigri.
 - b) Osmisli novi način povećavanja težine koji bi bio izazovan, ali pravedan izazov.
5. Aleks želi postaviti svjetiljke uz stazu u parku. Prva svjetiljka je na 3 metra od početka, druga na 7 metara, treća na 12 metara, četvrta na 18 metara.
 - a) Ima li ovaj niz logično pravilo?
 - b) Jesu li udaljenosti između svjetiljki optimalne?
 - c) Kako bi promijenio redoslijed da staza bude ravnomjerno osvijetljena?
6. U jednoj videoigri igrač skuplja zlatne kovanice. Broj kovanica koje dobija na svakom narednom nivou slijedi niz: 2, 6, 12, 20, 30, ...
 - a) Možeš li otkriti kako se povećava broj kovanica na svakom narednom nivou?
 - b) Koliko kovanica će igrač dobiti na 6. nivou?
 - c) Napiši opće pravilo prema kojem se može izračunati broj kovanica na bilo kojem nivou.
7. Osmisli svoj zanimljiv niz koji će se koristiti za izračunavanje nagrada u igri, sakupljanje bonusa ili raspodjelu nagrada na turniru. Objasni zašto je baš taj niz dobar i kako si ga učinio fer za sve učesnike.
- 8.* Zapiši pravilo za niz 2, 4, 8, 16, ... Zapiši pravilo za opći član a_n .

9. Zapiši pravilo prema kojem se određuje opći član niza:

a)



b)



c)



Predstavljjanje jednostavnih funkcija

Matematički koncept funkcije moćan je alat za modeliranje i analizu problema u stvarnom svijetu. Ona je jedan od osnovnih pojmova u matematici koji opisuje kako jedna veličina zavisi od druge, odnosno povezuje elemente jednog skupa s elementima drugog skupa prema određenom pravilu. Dio toga kako se prikazuje ova veza naučit ćeš u ovoj lekciji. Vježbajući naučeno, moći ćeš razumjeti i primjenjivati funkcije u stvarnim životnim situacijama, kao i u daljnjem učenju matematike.



Primjer 1

Počinem s 2, a zatim svaki sljedeći broj dobijam dodavanjem 5. Koji su prvih pet brojeva u ovom nizu i kako zapisujemo pravilo za nalaženje općeg člana?

Rješenje:



Prvih pet brojeva u nizu su: 2, 7, 12, 17, 22.

Primjer 2

Marko ima 5 jabuka. Svakog sljedećeg dana dobijao je još 3 jabuke. Koliko jabuka će imati nakon nekoliko dana dobijanja novih jabuka?

Rješenje:

Marko počinje s 5 jabuka. Svakog dana dobija još tri jabuke više. Dakle, ako situaciju predstavimo riječima: „Od početnih 5, broj Markovih jabuka povećava se za 3 svaki dan.“

Funkcija je pravilo prema kojem se svakom elementu jednog skupa pridružuje tačno jedan element drugog skupa.

U ovom primjeru broj jabuka zavisi od broja dana prema datom pravilu (funkciji) koje povezuje dvije veličine „broj dana“ s „brojem jabuka“.

Za veću preglednost, to ćemo prvo predstaviti tabelom:

Dan	Ulaz	Izlaz
Prvi dan	$5 + 3$	8
Drugi dan	$5 + 3 + 3$	11
Treći dan	$5 + 3 + 3 + 3$	14
Četvrti dan	$5 + 3 + 3 + 3 + 3$	17
Peti dan	$5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$	20
Šesti dan	$5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$	23

Prema tabeli i uslovu zadatka, za sedmi dan, na primjer, broj jabuka bit će $5 + 3 \cdot 7 = 26$ jabuka. Ako s x označimo broj dana, a s f pravilo koje broju dana pridružuje broj jabuka, imamo:

$$\begin{array}{lll}
 1 \xrightarrow{f} 5 + 3 \cdot 1 & 1 \xrightarrow{f} 8 & f(1) = 5 + 3 \cdot 1 = 8 \\
 2 \xrightarrow{f} 5 + 3 \cdot 2 \quad \dots \text{odnosno} & 2 \xrightarrow{f} 11 \quad \dots \text{ili drugačije napisano} & f(2) = 5 + 3 \cdot 2 = 11 \\
 3 \xrightarrow{f} 5 + 3 \cdot 3 & 3 \xrightarrow{f} 14 & f(3) = 5 + 3 \cdot 3 = 14
 \end{array}$$

Sada, ako s x označimo broj dana, a $f(x)$ je ukupan broj jabuka, dobija se formula $f(x) = 5 + 3x$. Ovakav način predstavljanja funkcije zove se analitički (ili predstavljanje formulom).

Prije nego što Marko počne dobijati jabuke, broj dana je $x = 0$ i Marko ima 5 jabuka.

Zadatak 1

Na početku školske godine Lena odlučuje početi skupljati markice. Ima 2 markice, a zatim svaki dan dodaje po 4 markice. Koliko markica će Lena imati nakon 3 dana? Zapiši funkciju jednačinom.

Primjer 3

U jednom marketu proizvodi se prodaju po posebnim cijenama. Za svakog kupca prodavnica nudi popust u zavisnosti od ukupne sume kupljenih proizvoda:

- Za sumu do 1000 dinara, nema popusta.
- Za sumu od 1000 do 5000 dinara, odobrava se popust od 5%.
- Za sumu iznad 5000 dinara, odobrava se popust od 10%.

Prodavnica nudi i dodatni popust od 2% za sve kupce koji svoje račune plate odmah.

- Zapiši funkciju koja predstavlja cijenu koju plaća kupac u zavisnosti od toga koliko je novca potrošio (bez popusta za plaćanje odmah).
- Koliko će platiti kupac koji je potrošio 6000 dinara?

Rješenje:

- a) Predstavljanje riječima: Najprije treba razmotriti kako iznos koji kupac plaća zavisi od sume koju je potrošio:

- Ako je potrošio do 1000 dinara, nema popusta.
- Ako je potrošio između 1000 i 5000 dinara, popust je 5%.
- Ako je potrošio više od 5000 dinara, popust je 10%.

Zatim, ako je kupac platio odmah, odobrava se dodatni popust od 2%.

Predstavljanje simbolima:

Neka je P ukupni iznos koji je kupac potrošio, a od njega zavisi iznos koji će platiti na kasi $f(P)$.

Funkcija za ukupnu cijenu izgleda ovako:

$f(P) = P$ ako je kupac potrošio 1000 dinara ili manje.

$f(P) = 0,95 \cdot P$ ako je potrošio više od 1000 dinara i najviše 5000 dinara.

$f(P) = 0,90 \cdot P$ ako je potrošio više od 5000 dinara.

$$\text{ili skraćeno* } f(P) = \begin{cases} P & \text{ako } P \leq 1000 \\ 0,95 \cdot P, & \text{ako } 1000 < P \leq 5000 \\ 0,90 \cdot P, & \text{ako } P > 5000 \end{cases}$$

Ako kupac plati odmah, odobrava se dodatni popust od 2% na iznos koji plaća nakon primjene prethodnog popusta. To znači da se od konačne cijene odbija 2% od ukupnog iznosa poslije primjene popusta.

- b) Računanje vrijednosti funkcije za konkretan primjer: ako je kupac potrošio 6000 denara: prema tački a) važi $f(6000) = 0,90 \cdot 6000$ denara.
Zatim primjenjujemo popust od 2% za plaćanje odmah na 5400 dinara:
 $0,98 \cdot 5400 = 5292$ denara.

Zadatak 2

Jovana prodaje cvijeće. Ovo je izvadak iz cjenovnika za jedno cvijeće svake vrste: Pri tome, ako kupac kupi više od 5 cvjetova, odobrava se popust od 10%. Ako kupi više od 10 cvjetova, popust raste na 15%.

Jovana odlučuje ponuditi dodatni popust od 5% svim kupcima koji plate odmah.

Ruža: 300 denara.
Lala: 150 denara.
Orhideja: 500 denara.

- a) Zapiši funkciju koja predstavlja cijenu koju kupac plaća u zavisnosti od toga koliko je cvjetova kupio (bez popusta za plaćanje odmah).
b) Izračunaj ukupnu cijenu za kupca koji je kupio 8 lala, 4 orhideje i 2 ruže, ako je odlučio platiti odmah.

Zadatak 3

Pri ronjenju, pritisak vode povećava se s porastom dubine na kojoj se ronilac nalazi. Gustina morske vode je 1020 kg/m^3 , pa na svakih 10 metara pritisak raste za 1,02 bara (bar je mjerna jedinica za pritisak). Veza za nekoliko početnih vrijednosti prikazana je u sljedećoj tabeli.

Dubina d (m)	10	20	30	40	50
Pritisak P (bar)	1,02	2,04	3,06	4,08	5,1

Je li moguće da na nekoj dubini postoje dvije različite vrijednosti pritiska? Zapiši funkciju za zavisnost pritiska od dubine ronjenja, a zatim odredi koliki je pritisak vode na dubini od 34 metra.

Možeš li navesti primjer iz svakodnevnog života koji bi se mogao predstaviti matematičkom funkcijom? Pokušaj sastaviti tekst za problem u realnom kontekstu za čije bi rješavanje bila korištena funkcija

a) $f(x) = 320 - 5x$

b) $f(x) = 320 + 5x$

Napravi misaonu mapu počevši od pojma FUNKCIJA. Zatim se provjeri koristeći lekciju.

Samostalni rad

1. Prikaži funkciju $f(x) = 2x + 5$ riječima (objasni šta znači svaki dio ove funkcije).
2. Data je funkcija $f(x) = 2x - 1$. Odredi vrijednost $f(x)$ za sljedeće vrijednosti x : $x = 3$, $x = -2$, $x = 0$.
3. $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ je poznata funkcija u matematici. Objasni je riječima i zapiši formulom.
4. Data je funkcija $f(x) = 3x - 4$. Zapiši pet vrijednosti funkcije (za $x = 1, 2, 3, 4, 5$).
5. Ako se temperatura u gradu povećava za 3°C svaki sat, počevši od 15°C , kako bi zapisali funkciju za temperaturu tokom vremena?
6. Janina kosa duga je 25 cm. Svakog mjeseca raste po 1,5 cm. Zapiši funkciju K za zavisnost dužine Janine kose nakon m mjeseci. Izračunaj dužinu Janine kose nakon 5 mjeseci.
7. a) U Miloševoj bašti bilo je 40 sadnica povrća. Međutim, zbog loših vremenskih uslova počele su da se suše po 3 dnevno. Zapiši formulom kako broj sadnica S zavisi od broja dana d . Za koliko dana će se osušiti sve sadnice?
b) Riječima zapiši funkciju koja je data sa $S = 15 + 4d$ (ako su S i d oznake za broj sadnica i broj dana) u Miloševoj bašti.

8. U tabeli su date vrijednosti prijednog puta u zavisnosti od vremena Lejlinog putovanja. Zapiši zavisnost puta od vremena.

Vrijeme (sati)	0	1	2	3	4
Put (kilometri)	0	50	100	150	200

9. Omer izvodi hemijski eksperiment. Reakcija se sastoji od zagrijavanja supstance, pri čemu se temperatura povećava za 2°C svake minute. Ako je početna temperatura supstance bila 18°C , zapiši funkciju kojom ćeš izračunati kolika je temperatura T (u stepenima) za vrijeme m (u minutama)?

Grafički prikaz linearne funkcije i koordinatni parovi

Linearne funkcije su jedni od najčešćih matematičkih modela koje ćeš koristiti u svakodnevnom životu. One predstavljaju odnos između dvije veličine. Na primjer, ukupna masa više istih proizvoda u marketu linearna je funkcija mase jednog takvog proizvoda; kada putuješ konstantnom brzinom, rastojanje koje pređeš u datom vremenu linearna je funkcija vremena; cijena taksi-prevoza je vrijednost linearne funkcije koja zavisi od pređenih kilometara.



Primjer 1

Musa prodaje sveske. Počeo je sa 200 dinara, a zarađuje po 50 dinara od svake prodane sveske. Napiši formulu za funkciju koja povezuje ukupnu zaradu $f(x)$ s brojem prodatih svesaka x .

Rješenje:

$f(x) = 50x + 200$, gdje je: x broj prodatih svesaka, $f(x)$ ukupna zarada, 50 zarada po svesci, a 200 početna suma.

Linearna funkcija je zavisnost između dvije promjenljive koja se izražava formulom:

$$f(x) = ax + b,$$

gdje je x nezavisna promjenljiva, $f(x)$ zavisna promjenljiva i često se zapisuje kao y ($y = ax + b$). Brojevi a i b su dati, a za to da funkcija bude linearna vrijedi $a \neq 0$.

Primjer 2

Data je linearna funkcija: $y = 2x - 3$

a) Nađi koliki je y za: $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$.

b) Objasni kako dobijeni koordinatne-parovi predstavljaju funkciju.

Rješenje:

a) Račun je prikazan u tabeli:

x	-1	0	2
Preračun y	$y = 2 \cdot (-1) - 3 = -2 - 3$	$y = 2 \cdot 0 - 3 = 0 - 3$	$y = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3$
y	-5	-3	1

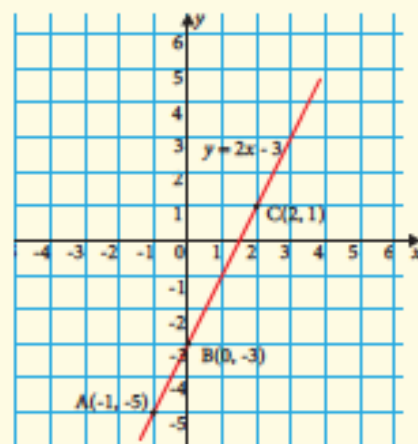
Iz tabele možemo uočiti koordinatne parove: $(-1, -5)$, $(0, -3)$, $(2, 1)$.

Koordinatni par je uređeni par brojeva (x, y) koji određuje položaj jedne tačke u koordinatnom sistemu.

Prvi broj u svakom koordinatnom paru predstavlja x -koordinatu (apscisu), što znači da prikazuje vrijednost nezavisne promjenljive.

Drugi broj u svakom koordinatnom paru predstavlja y -koordinatu (ordinatu), što znači da prikazuje vrijednost zavisne promjenljive y .

Ako dobijene koordinatne parove iz primjera 2 ucrtamo u koordinatni sistem, dobijamo tačke koje odgovaraju svakom paru. Povezivanjem tih tačaka dobija se prava koja predstavlja grafikon linearne funkcije.



Primjer 3

Da li je koordinatni par $(1, 5)$ tačka grafa linearne funkcije iz primjera 2 ($y = 2x - 3$)?

Rješenje:

Da li $(1, 5)$ je tačka grafika na $y = 2x - 3$ može da se provjeri na dva načina, i to:

I način: Pošto je nacrtan grafik funkcije $y = 2x - 3$, možemo pronaći tačku s koordinatama $(1, 5)$.

Treba provjeriti leži li ta tačka na pravoj koja je grafik funkcije $y = 2x - 3$.

II način: Zamjenom $x = 1$ i $y = 5$ u jednačini $y = 2x - 3$ dobijamo $5 = 2 \cdot 1 - 3$, $5 \neq -1$. Kako dobijamo netačno brožčano jednakstvo, uređeni par nije rješenje jednačine linearne funkcije, odnosno tačka s koordinatama $(1, 5)$ nije tačka na pravoj (grafiku linearne funkcije) $y = 2x - 3$.

Zadatak 1

Provjeri koji od koordinatnih parova zadovoljavaju uslove linearne funkcije $y = x - 1$:

- a) $(1, 0)$ b) $(2, 2)$ c) $(-1, 2)$ d) $(-2, -3)$ e) $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

Zadatak 2

Nacrtaj grafik linearnih funkcija:

- a) $y = 3x$ b) $y = 2x - 4$ c) $y = -x + 2$
 d) $y = -4x$ e) $y = -3x - 1$

Zadatak 3

Kada telefonira Simeon, plaća osnovnu cijenu od 50 dinara, plus 10 dinara za svaku minutu razgovora. Napravi tabelu ukupne cijene za 1, 2, 3 i 4 minute razgovora.

Primjer 4

U jednom restoranu cijena obroka zavisi od broja naručenih porcija. Vrijednost računa može se izračunati funkcijom $y = 3x + 5$, gdje x predstavlja broj porcija, a y je ukupna cijena u eurima.

- a) Nađi koordinatne parove za $x = 1$, $x = 3$ i $x = 5$.
 b) Nacrtaj grafik ove funkcije u koordinatnom sistemu.
 v) Šta predstavlja vrijednost 5 u ovoj situaciji? Šta znači broj 3?
 g) Ako student naruči 4 porcije, koliki će biti njegov račun?

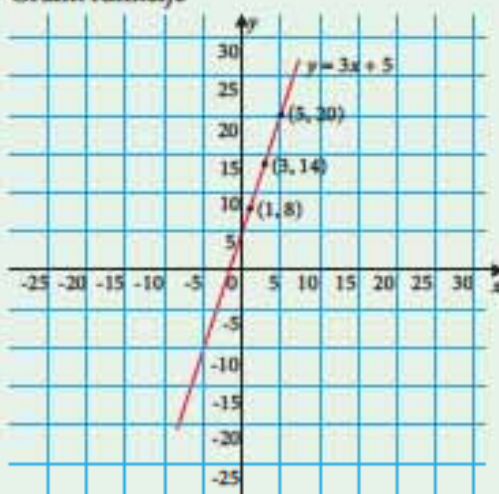
Rješenje:

- a) Računamo vrijednost y za svaku vrijednost x . Za $x = 1$, $y = 3 \cdot 1 + 5 = 3 + 5 = 8$; za $x = 3$, $y = 3 \cdot 3 + 5 = 9 + 5 = 14$; a za $x = 5$, $y = 3 \cdot 5 + 5 = 15 + 5 = 20$. Može se popuniti tabela:

Broj porcija x	1	3	5
Ukupna cijena u eurima y	8	14	20

Iz tabele možeš zapisati koordinatne parove: $(1, 8)$, $(3, 14)$, $(5, 20)$.

- b) Grafik funkcije



- c) Vrijednost 5 u jednačini predstavlja početnu cijenu, što znači da bez obzira koliko porcija bude naručeno, početna cijena je 5 eura (npr. za rezervaciju stola u restoranu). Broj 3 ispred promjenljive x , odnosno ispred broja naručenih porcija, jeste cijena za 1 porciju (dakle, jedna porcija košta 3 eura).
- d) Ako student naruči 4 porcije, da bismo izračunali ukupni iznos, uvrštavamo $x = 4$ u funkciju: $y = 3 \cdot 4 + 5 = 12 + 5 = 17$. Znači, račun za 4 porcije iznosi ukupno 17 eura.

Zadatak 4

Valbona štedi po 200 dinara svake sedmice. U početku je imala 500 dinara.

- Napiši funkciju koja opisuje Valboninu uštedevinu.
- Napravi tabelu za prvih pet sedmica.
- Nacrtaj grafik.

Nacrtaj grafikone linearnih funkcija $y = x + 3$ i $y = -x - 3$. Objasni razliku između grafika dvije funkcije.

U svesku zapiši odgovore i objašnjenja.

1. Razumijem šta je linearna funkcija. Da/Ne
(Objasni kako razumiješ funkciju.)
2. Znam kako izračunati y za datu vrijednost x u funkciji. Da/Ne
(Napiši primjer.)
3. Mogu nacrtati grafik funkcije unošenjem koordinatnih parova i povezivanjem tačaka? Da/Ne
(Opiši kako si nacrtao/la grafik.)

Koliko se osjećam sigurno u ovoj lekciji?

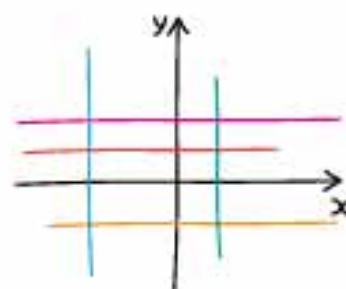
Mnogo siguran/Djelimično siguran/Nisam siguran (Objasni zašto.)

Samostalni rad

1. U prodavnici elektronike cijena televizora smanjuje se za 500 dinara za svaki dan otkako počne popust.
 - a) Ako je početna cijena televizora bila 15 000 dinara, zapiši formulu za cijenu televizora u zavisnosti od dana x .
 - b) Nađi cijenu nakon 3, 5 i 7 dana.
 - c) Nacrtaj grafik funkcije.
2. U autobuskoj kompaniji trošak putovanja od grada A do grada B računa se formulom $y = 30x + 10$, gdje x predstavlja broj kilometara, a y je trošak u denarima.
 - a) Nađi trošak putovanja od 100 kilometara i 250 kilometara.
 - b) Nacrtaj grafik funkcije.
3. Risto radi u prodavnici elektronike. Njegova osnovna dnevna zarada je 1000 denara, a dobija plus 200 denara za svaki prodani proizvod.
 - a) Zapiši formulu za njegovu zaradu y u zavisnosti od broja proizvoda koje proda.
 - b) Nađi koliko će zaraditi ako proda 3, 4 i 6 proizvoda.
 - c) Nacrtaj grafik.
4. U knjižari gdje kupuje Isak, za kupljene više od 3 knjige dobija popust od 5 eura na ukupnu cijenu. Formula za cijenu pri kupovini knjiga, ako jedna knjiga košta 4 eura, je $y = 4x - 5$. Nađi cijenu za 5 i 7 knjiga i nacrtaj grafik.
5. Iznajmljivanje jednog bicikla košta 100 dinara na dan. Osim toga, svako ko želi iznajmiti bicikl mora platiti i članarinu od 50 dinara.
 - a) Napiši formulu za ukupnu cijenu koju plaća osoba kada iznajmljuje bicikl za nekoliko dana.
 - b) Koliko će platiti osoba koja iznajmljuje bicikl na 2 dana? A na 4 dana?

Grafici linearnih funkcija paralelnih x - ili y -osi

U ovoj lekciji upoznat ćeš funkcije čiji su grafici paralelni x -osi ili y -osi. Naučit ćeš kako ih prepoznati i kako crtati njihove grafike. Funkcije paralelne x -osi imaju konstantnu vrijednost za y , dok funkcije paralelne y -osi imaju konstantnu vrijednost za x . Ova lekcija pomoći će ti da razumiješ osnovne karakteristike ovih funkcija i njihovo predstavljanje grafikom.



Primjer 1

Izradi misaonu mapu za linearnu funkciju.
Provjeri svoju mapu koristeći prethodnu lekciju.

Zadatak 1

Nacrtaj grafik za linearnu funkciju $y = 2x - 3$.
Koliki su koeficijenti a uz nezavisnu promjenljivu x i b ?

Primjer 2

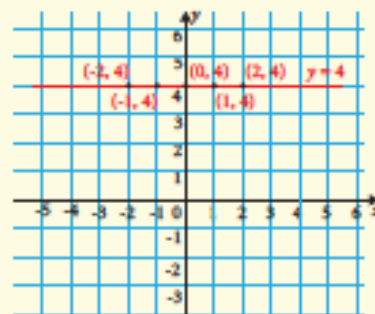
Nacrtaj grafik funkcije $y = 0 \cdot x + 4$.

Rješenje:

Za funkciju $y = 0 \cdot x + 4$ koeficijent ispred nezavisne promjenljive x je 0. Prije crtanja grafa napravimo tabelu. Budući da je svaka vrijednost x pomnožena s 0 jednaka nuli, vrijednost y je 4 za svaku vrijednost x .

x	-2	-1	0	1	2
y	4	4	4	4	4

Na svaki od dobijenih koordinatnih parova $(-2, 4)$, $(-1, 4)$, $(0, 4)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$ pridružujemo odgovarajuću tačku u koordinatnom sistemu. Povezivanjem tačaka dobijamo horizontalnu pravu, paralelnu x -osi. Formulu funkcije možemo zapisati i kao $y = 4$. Ovo je konstantna funkcija jer je za svaku vrijednost x vrijednost y jednaka 4.



Primjer 3

Data je funkcija $x = -2$, koja nije eksplicitno izražena preko y , nego preko x . Nacrtaj njen graf.

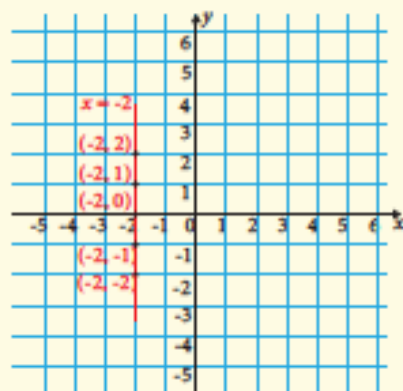
Rješenje:

U funkciji $x = -2$, x ima konstantnu vrijednost.

To znači da za bilo koju vrijednost y , x ima vrijednost -2 . To se može prikazati:

x	-2	-2	-2	-2	-2
y	-2	-1	0	1	2

Za svaki koordinatni par $(-2, -2)$, $(-2, -1)$, $(-2, 0)$, $(-2, 1)$, $(-2, 2)$ pronalazimo tačku u koordinatnom sistemu. Povezivanjem tačaka dobijamo vertikalnu pravu, paralelnu y -osi.



Zadatak 2

Nacrtaj grafikone funkcija:

- a) $y = -2$ b) $x = 3$ c) $x = 1\frac{1}{2}$ d) $y = 5$ e) $y = -2\frac{1}{3}$

Primjer 4

U laboratoriji se ispituje uređaj koji održava stalnu temperaturu u zatvorenoj prostoriji. Bez obzira na proteklo vrijeme, temperatura je uvijek 22°C .

- a) Zapiši funkciju $T(t)$ koja opisuje temperaturu u zavisnosti od vremena t , gdje je t broj proteklih sati (može biti i negativan – prije početka mjerenja).
b) Nacrtaj grafik funkcije i objasni kakav je.

Rješenje:

- a) Funkcija je $T(t) = 22$, gdje je t broj proteklih sati (može biti i negativan broj – prije početka mjerenja).

- b) Ovo znači da za svaki sat tokom mjerenja i prije mjerenja temperatura ostaje na 22°C . Da bismo nacrtali grafik, označimo nekoliko tačaka u koordinatnom sistemu: $(-2, 22)$, $(-1, 22)$, $(0, 22)$, $(1, 22)$, $(2, 22)$, $(3, 22)$. Povezivanjem ovih tačaka dobija se grafik funkcije $y = 22$. Grafik će biti horizontalna prava paralelna s x -osom, što znači da temperatura ostaje konstantna.



Razmisli o dvije funkcije: jedna se zapisuje u obliku $y = m$, a druga u obliku $x = n$. Kako izgleda grafik svake od ovih funkcija (na koje ose su paralelne i zašto)? Kako ti ovo znanje može pomoći pri rješavanju stvarnih problema?

U svoju svesku riješi zadatke:

1. Koja je razlika između funkcija oblika $y = b$ i $x = a$?
2. Koje od funkcija: $y = -1$, $x = -3$, $x = 2$, $y = 4,5$ imaju grafik – pravu paralelnu s y -osom?
3. Nacrtaj grafike funkcija $y = -3$ i $x = 2$.
4. Napiši problem iz svakodnevnog života koji će se rješavati korištenjem jedne od funkcija $y = b$ i $x = a$.

Vrati se na lekciju i provjeri jesi li tačno rješavao/la.

Ako imaš 2 netačna zadatka, treba da se fokusiraš na ponovo učenje i vježbanje grafika linearnih funkcija oblika $y = b$ i $x = a$.

Ako si riješio/la 3 ili 4 zadatka, smatra se da si uspješan/na u ovoj lekciji.

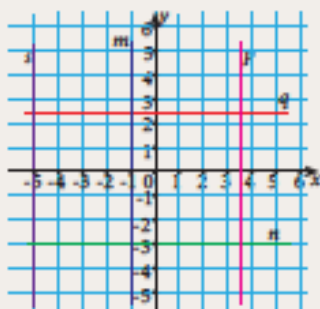
Samostalni rad

1. U jednoj školskoj sali klima-uređaj je podešen tako da se temperatura u sobi održava stalno na 17°C , bez obzira na doba dana.
 - a) Napiši funkciju koja opisuje temperaturu u sobi.
 - b) Nacrtaj grafik funkcije.
2. U lokalnom restoranu dnevni specijal uvijek se prodaje po fiksnoj cijeni od 150 dinara, bez obzira na dan.
 - a) Izrazi vezu između cijene i dana kao funkciju.
 - b) Nacrtaj grafik funkcije.

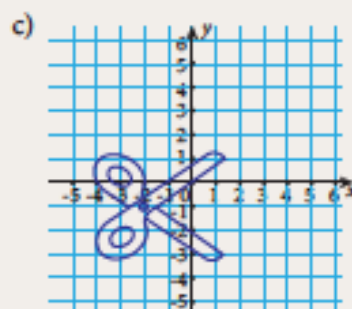
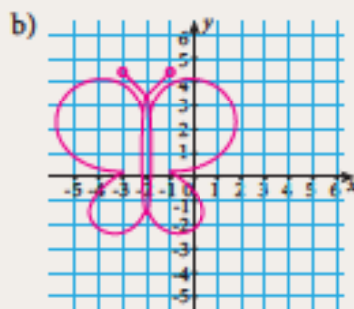
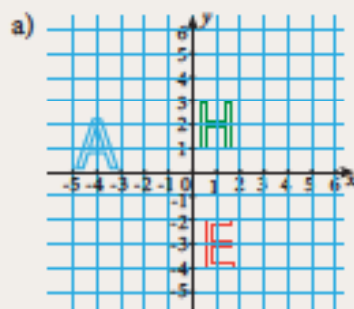
3. U parku, automat za tople napitke uvijek prima tačno 100 denara, bez obzira na vrstu ili broj napitaka koji se mogu dobiti.

- a) Zapiši funkciju koja opisuje ulazni iznos u automat.
b) Nacrtaj grafik funkcije.

4. Napiši jednačine datih pravih.



5. Zapiši jednačine osa simetrije za sljedeće oblike:



6. a) Oznaci tačke $(-4, 3)$, $(-4, 5)$, $(-4, 0)$, $(-4, 2)$, $(-4, -3)$ u koordinatnom sistemu. Zapiši jednačinu prave koja prolazi kroz ove tačke.
b) Oznaci tačke $(-4, 5)$, $(-3, 5)$, $(2, 5)$, $(0, 5)$, $(4, 5)$ u koordinatnom sistemu. Zapiši jednačinu prave koja prolazi kroz ove tačke.
7. U koordinatnom sistemu nacrtaj oblik za koji su prave $x = 3$ i $y = 4$ ose simetrije.
8. Tačke $M(2, 3)$, $N(-1, 5)$, $P(-4, 3)$ i $Q(-1, -1)$ su temena deltoida.
a) Nacrtaj deltoid u koordinatnom sistemu.
b) Zapiši jednačine pravih na kojima leže dijagonale deltoida, respektivno.
9. Date su tačke $A(2, 4)$, $B(2, -3)$, $C(1, 4)$, $D(2, -2)$, $E(2, 6)$. Koja od tačaka ne pripada grupi? Objasni svoj odgovor.

T E M A

4

MJERENJE



Zamislite jedan dan u kojem ništa ne može biti izmjereno. Kako bismo znali koliko je sati, koliko kilometara smo prešli, kolika je masa nekog predmeta ili koliko vremena treba da kuhamo čaj?

Mjerenje je postupak kojim uspoređujemo veličine predmeta s odabranim mjernim jedinicama i na taj način određujemo njihovu dužinu, masu, volumen, vrijeme ili neku drugu veličinu.

**„Mjerenje je umjetnost da budeš tačan
– bez njega bi sve bilo samo približno.“**

Rezultati učenja

Nakon izučavanja ove teme bit ćeš sposoban/sposobna da:

- biraš odgovarajuće mjerne jedinice za procjenu, mjerenje, proračun i rješavanje problema u svakodnevnom kontekstu;
- crtaš i tumačiš grafikone iz stvarnog života uključujući više od jedne faze, na primjer, grafikon za vrijeme putovanja;
- rješavaš probleme iz svakodnevnih situacija proračunavanjem perimetra četverougla, površine složenih 2D-oblika i volumena kvadra i kocke.

Mjerni instrumenti za dužinu i mjerne jedinice. Mikron

U ovoj lekciji ćeš se upoznati sa dvije vrste mjernih instrumenata koji se koriste za mjerenje dužine, a to su analogni i digitalni instrumenti. Ovi instrumenti su ključni za tačnost i preciznost u različitim naučnim, tehničkim i industrijskim oblastima.

Analogni instrumenti za mjerenje, kao što su mjerne lenijere i šubleri, uobičajeni su i laki za upotrebu, ali zahtijevaju pažnju i tumačenje očitavanja. Digitalni instrumenti, pak, koriste elektronske displeje i automatski pokazuju tačne vrijednosti, što ih čini savremenijim i pogodnim za precizna mjerenja.



Posebno ćeš se fokusirati na mjerenje vrlo malih dužina i debljina, što zahtijeva upotrebu mikronskih instrumenata. Mikronski instrument je idealan za mjerenje vrlo malih dimenzija, kao što je debljina materijala ili preciznost dijelova u mašinstvu i elektronici. Pri tome ćeš se upoznati sa mjernom jedinicom mikrometar i njenim pretvaranjem u metre i milimetre.

Primjer 1

Milan je odlučio napraviti ram za sliku. Za to će mu biti potrebne različite dužine drvenih letvica. On ima mjerne instrumente sa mjernim jedinicama za dužinu u centimetrima i metrima. Pomozi mu da izvrši proračune i odgovori na pitanja:

- Ako Milan ima drvenu letvicu koja je duga 3 metra i je podijeli na 100 dijelova, koliko centimetara će imati svaki dio?
- Milan treba iskoristiti dvije letvice: jedna je 1,5 metar, a druga je 150 centimetara. Koliko su duge zajedno u centimetrima? (Zapiši postupak i rezultat.)
- Ako Milan treba kupiti 5 letvica, svaka duga 2 metra, kolika će biti ukupna dužina letvica u centimetrima?
- Zapiši ukupnu dužinu letvica ako Milan ima letvicu od 2 metra i letvicu od 850 centimetara. Kako ćeš ovu dužinu zapisati u metrima i u centimetrima?
- Milan je procijenio da je svaka drvena letvica duga oko 4 metra. Ako svaka letvica ima tačnu dužinu od 3,7 metara, izračunaj ukupnu dužinu od 5 takvih letvica. Kolika je razlika između procijenjene i tačne ukupne dužine?

Rješenje:

- a) $3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$, $300 \text{ cm} : 100 = 3 \text{ m}$
- b) $1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$, ukupna dužina $150 \text{ cm} + 150 \text{ cm} = 300 \text{ cm}$
- c) $5 \cdot 2 \text{ m} = 10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$
- d) $2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$, $200 \text{ cm} + 850 \text{ cm} = 1050 \text{ cm}$, $1050 \text{ cm} = 10 \text{ m } 50 \text{ cm}$
- e) Milan procjenjuje da je svaka letvica 4 metra. Dakle, procijenjena ukupna dužina je $5 \cdot 4 = 20 \text{ m}$.
Ako je svaka letvica 3,7 metara, svih 5 letvica imaju ukupnu dužinu: $5 \cdot 3,7 = 18,5 \text{ m}$.
Razlika između procijenjene i tačne ukupne dužine je $20 - 18,5 = 1,5 \text{ m}$.

Zadatak 1

Grad planira izgraditi mali most preko potoka za biciklističku stazu. Ti si dio tima koji treba izmjeriti i odrediti tačne dimenzije za most. U vezi sa gradnjom dati su sljedeći podaci:

- Širina potoka je 4,25 m.
 - Most ima širinu koja je s obje strane potoka za 0,5 m veća od širine potoka.
 - Dužina mosta treba biti 3 puta veća od njegove širine.
- a) Koje mjerne instrumente ćeš koristiti da izmjeriš dužine na terenu?
- b) Kolika će biti ukupna širina mosta?
- c) Kolika će biti dužina mosta?
- d) Ako koristiš metar s milimetarskom podjelom, kako ćeš tačno predstaviti mjerenje u centimetrima i milimetrima?

Primjer 2

Aneta je ljubitelj biologije i želi proučiti razlike između različitih biljnih vlakana. Ona želi izmjeriti debljinu vlakana sa lista jedne trave. Njena nastavnica joj kaže da se debljina jednog vlakna obično mjeri u mikronima (μm).

1 mikron (μ) jednak je milionitom dijelu metra.

Koristeći odgovarajuće instrumente za mjerenje vrlo malih dužina, Aneta je došla do zaključka da je debljina vlakna trave $50 \mu\text{m}$.

Dužina jednaka milionitom dijelu metra u SI sistemu naziva se mikrometar, μm .
Označavanje ove dužine sa mikron (μ) povučeno je iz upotrebe 1967. godine.

- 
- a) Pretvori debljinu iz mikrona u milimetre.
 - b) Ako je debljina ljudske dlake približno $70\text{ }\mu\text{m}$, koja je dlaka tanja, dlaka lista ili ljudska? Kolika je razlika u mikronima između dvije dlake?
 - c) Da bi zamislio veličinu, izračunaj koliko bi se takvih dlaka moglo poredati jednu do druge da formiraju dužinu od 1 milimetar.
 - d) Zašto je važno u nauci koristiti mikrometre za mjerenje ovako malih dimenzija?

Rješenje:

- a) Koristeći vezu između milimetara i mikrona, ako je debljina vlakna $50\text{ }\mu\text{m}$, tada: $50\text{ }\mu\text{m} = 50 : 1000\text{ mm} = 0,05\text{ mm}$. Debljina vlakna je $0,05\text{ mm}$.
- b) Ako je debljina ljudske dlake $70\text{ }\mu\text{m}$, a debljina trave $50\text{ }\mu\text{m}$, razlika između njih je: $70\text{ }\mu\text{m} - 50\text{ }\mu\text{m} = 20\text{ }\mu\text{m}$. Dlaka trave je tanja za $20\text{ }\mu\text{m}$.
- c) Da bi se zamislila veličina, treba izračunati koliko vlakana od $50\text{ }\mu\text{m}$ može stati jedno do drugog da formiraju dužinu od 1 mm. Kako je $1\text{ mm} = 1000\text{ }\mu\text{m}$, dobijamo: $1000\text{ }\mu\text{m} : 50\text{ }\mu\text{m} = 20$. Dakle, kada se 20 vlakana od $50\text{ }\mu\text{m}$ poredaju jedno do drugog, dobija se dužina od 1 mm.
- d) Korištenje mikrona (μm) u nauci je vrlo važno za tačno mjerenje malih dimenzija, kao što su ćelijske strukture, mikroskopski objekti ili vlakna. Mikroni omogućavaju visoku preciznost u mjerenju stvari koje su premale da bi se mjerile običnim instrumentima u centimetrima ili milimetrima. Ovo je posebno korisno u biologiji, medicini i tehnologiji, gdje detalji na mikron nivou imaju veliko značenje za razumijevanje procesa i funkcija.

Zadatak 2

Jedan naučni eksperiment zahtijeva precizno određivanje dimenzija vrlo malog predmeta u obliku kvadra. Mjerenja su data u različitim jedinicama: dužina predmeta je $2500\text{ }\mu\text{m}$, širina predmeta je $0,75\text{ mm}$ i visina predmeta je $0,05\text{ cm}$.

- a) Pretvori sve dimenzije u milimetre.
- b) Pretvori sve dimenzije u mikrone.
- c) Koliko puta je dužina predmeta veća od visine?

Primjer 3

Elektroinženjer izrađuje štampanu ploču za elektronski uređaj. Dimenzije ploče su date u različitim jedinicama: dužina ploče je 15 cm , širina ploče je 85 mm i debljina ploče je $1200\text{ }\mu\text{m}$.

- a) Pretvori sve dimenzije u milimetre.
- b) Pretvori sve dimenzije u mikrone.

- c) Ako svaki sloj ploče ima debljinu od $1200\ \mu\text{m}$, koliko slojeva se može staviti u kutiju s maksimalnom visinom od $2\ \text{cm}$?

Rješenje:

- a) Pretvaranje u milimetre:

$$1\ \text{cm} = 10\ \text{mm}, 1\ \mu\text{m} = 0,001\ \text{mm}$$

- Dužina: $15\ \text{cm} = (15 \cdot 10)\ \text{mm} = 150\ \text{mm}$
- Širina: $85\ \text{mm}$ – već je u milimetrima
- Debljina: $1200\ \mu\text{m} = (1200 \cdot 0,001)\ \text{mm} = 1,2\ \text{mm}$

- b) Pretvaranje u mikrone:

$$1\ \text{mm} = 1000\ \mu\text{m}, 1\ \text{cm} = 10\ 000\ \mu\text{m}$$

- Dužina: $15\ \text{cm} = (15 \cdot 10\ 000)\ \mu\text{m} = 150\ 000\ \mu\text{m}$
- Širina: $85\ \text{mm} = (85 \cdot 1000)\ \mu\text{m} = 85\ 000\ \mu\text{m}$
- Debljina: $1200\ \mu\text{m}$ – već je u mikronima

- c) Proračun broja slojeva:

- Maksimalna visina kutije: $2\ \text{cm} = 20\ \text{mm}$
- Debljina jednog sloja: $1,2\ \text{mm}$

$$\text{Broj slojeva} = 20\ \text{mm} : 1,2\ \text{mm} = 16,6$$

Budući da ne može postojati dio sloja, maksimalan broj slojeva je 16.

Zadatak 3

Petar želi izmjeriti debljinu tri različita sloja odjeće koje koristi u zimskim uvjetima. Za to koristi posebne mjerne instrumente i dobiva sljedeća mjerenja:

- Debljina sloja s unutrašnje strane zimske jakne: $450\ \mu\text{m}$.
- Debljina sloja zimskog džempera: $800\ \mu\text{m}$.
- Debljina sloja s vanjske strane zimske jakne: $1\ 200\ \mu\text{m}$.

- Pretvori debljine sva tri sloja iz mikrona (μm) u milimetre (mm).
- Koji odjevni sloj je najdeblji? Koji je najtanji? Kolika je razlika u mikronima između najtanjeg i najdebljeg sloja?
- Koliko svakog sloja treba naslagati jedan na drugi da bi debljina dobijene kombinacije bila $5\ \text{cm}$?
- Objasni zašto je važno koristiti mikrone (μm) pri mjerenju debljine različitih materijala, kao što je odjeća. Kako to može pomoći u dizajniranju zimske odjeće?

Zadatak 4

Pročitaj dužinu prikazanu na različitim mjernim instrumentima i za svaki instrument zapiši da li je analogni ili digitalni.



Petar, koji živi u hladnoj regiji, treba izabrati koju zimsku odjeću će nositi da bi se zaštitio od hladnog vremena. On je izmjerio debljine tri sloja odjeće (polarna jakna, zimski džemper i zimska jakna), ali želi znati kako debljina odjeće utiče na njenu izolaciju. Ako odjeća koja ima veću debljinu zadržava toplotu efikasnije, kako ćeš iskoristiti ovu informaciju da pomogneš Petru da izabere najbolju zimsku odjeću za različite temperaturne uslove?

Objasni kako znanje o mikronima i debljini slojeva može pomoći pri donošenju odluke o oblačenju u zimskim uslovima. Istraži karakteristike različitih vrsta odjeće u zavisnosti od debljine.

Odgovori na pitanja u tvojoj svesci, a zatim ih podijeli sa svojim školskim drugovima:

1. Razumio/la sam šta je mikron (μm) i kako se koristi pri mjerenju malih dimenzija. (Da / Ne)
Ako ne, koji dijelovi objašnjenja ili rješavanja zadatka su mi bili nejasni?
2. Da li sam uspio/la pravilno pretvoriti mjerne jedinice (mikrone u milimetre)? (Da / Ne)
Ako ne, kako bih poboljšao/la proces pretvaranja?
3. Šta sam naučio/la o tome kako mjerenje u mikronima pomaže u različitim naučnim i praktičnim situacijama?
Napiši kratak odgovor na ovo pitanje da sumiraš naučeno.

Samostalni rad

1. Pretvori sljedeća mjerenja u druge jedinice.
 - a) 3,5 kilometara u metre.
 - b) 250 milimetara u centimetre.
2. Udaljenost od kuće stanovanja do škole je 546 metara. Zapiši mjerenje kao složeni broj.
3. Pretvori mjerenje 3,25 m u centimetre koristeći decimalne brojeve do tri decimale.
4. Da bi procijenio/la i zatim tačno izmjerio/la dužinu stola u svojoj učionici, slijedi ove korake:
 1. Procjena dužine:
 - Pogledaj sto i pokušaj ga uporediti s poznatim predmetom čiju dužinu znaš, na primjer list papira formata A4 (koji je dug približno 30 cm) ili dužinom svoje ruke.
 - Na osnovu ovog poređenja, napravi približnu procjenu dužine stola.
 2. Mjerenje s mjernim instrumentima:
 - Koristi odgovarajući mjerni instrument, kao što je metar ili lenijar, da tačno izmjeriš dužinu stola.
 - Postavi mjerni instrument po dužini jedne strane stola i zabilježi izmjerenu dužinu.
 - Ako je mjerni instrument kraći od dužine stola, izvrši više mjerenja i saber ih da dobiješ ukupnu dužinu.
 3. Poređenje procjene s mjerenjem:
 - Uporedi svoju početnu procjenu s tačno izmjerenom dužinom.
 - Zabilježi razliku između procjene i mjerenja i razmisli o mogućim razlozima za tu razliku.

Ova aktivnost će ti pomoći da unaprijediš svoje vještine za procjenu i mjerenje, kao i da razumiješ koliko je važna preciznost pri mjerenju dužina.
5. Koji složeni broj je veći: 5 metara ili 520 centimetara? Za koliko?
6. Izračunaj obim (perimetar) sljedećih mnogouglova ako su date dužine njihovih stranica.
 - a) Pravougaonik sa stranicama 4 m i 6 m.
 - b) Trougao sa stranicama 5 cm, 8 cm i 5 cm.
 - c) Pravilni petougao sa stranicom 3 m.
7. Marko ima ukrasnu traku od 1500 mm. Pretvori ovu dužinu u složeni broj.

8. Izmjeri dužinu pomoću lenijara i zapiši je u centimetrima i milimetrima. Kakva je tačnost mjerenja koje si dobio/la? Koje su granice mjerenja ovim instrumentom?

*9. Koristeći mikrometar, izmjeri debljinu neke sitne metalne niti ili žice. Zapiši mjerenje u mikronima (μm) i pretvori ga u milimetre. Kako mikrometar omogućava tačno mjerenje malih dimenzija? Može li se mikrometar koristiti za mjerenje većih predmeta? Zašto da ili zašto ne?



Mjerni instrumenti za masu i pretvaranje mjernih jedinica za masu

U ovoj lekciji ćeš se fokusirati na važnost tačnosti pri mjerenju mase. Podsjetit ćeš se kako da očitavaš skale na analognim i digitalnim mjernim instrumentima za masu, kako da koristiš odgovarajuće mjerne jedinice i oznake pri mjerenju.

Posebnu pažnju obratićeš na pretvaranje mjernih jedinica za masu koristeći odnose među različitim jedinicama. Ove vještine su neophodne za precizne proračune i procjene, koje mogu biti korisne u različitim oblastima, kao što su nauka, industrija, zdravstvo i svakodnevni život.

Primjer 1

Koji od mjernih instrumenata za masu su analogni, a koji digitalni?

1)



2)



3)



4)



Primjer 2

Marko i Jana su angažirani na projektu za izradu etiketa s preciznim mjerama mase različitih materijala koji se koriste u fabrici za pakovanje. Oni trebaju mjeriti masu različitih predmeta koristeći različite mjerne instrumente i jedinice. U procesu će se koristiti i analogne i digitalne vage za mjerenje, a također će trebati pretvarati jedinice iz jedne u drugu kako bi dobili tačne rezultate i zapisali podatke.

- Marko koristi analognu vagu koja ima skalu s podjelama na svakih 100 grama. On mjeri masu komada aluminijske ploče i očitava vrijednost na skali. Ako se kazaljka nalazi poslije sedme podjele po 100 grama i na trećoj podjeli po 10 grama, kolika je ukupna masa komada aluminijske ploče?
- Jana koristi digitalnu vagu koja direktno pokazuje masu u kilogramima. Digitalna vaga pokazuje 2,850 kg za veliki paket. Koliko je to u gramima? (Zapiši postupak za pretvaranje jedinica).
- Marko treba zapisati podatak o masi pakovanja od 5 paketa od kojih svaki ima masu od 3,2 kg. Kolika će biti ukupna masa svih paketa ako je zapišemo u gramima? Kolika će biti ukupna masa ako je zapišemo u tonama?
- Jana procjenjuje da je masa jednog paketa 3 kilograma. Koristeći digitalnu vagu, mjerenje pokazuje 3,4 kg. Kolika je razlika između procjene i mjerenja? Koliko posto od tačne mase (3,4 kg) iznosi procijenjena masa (3 kg)?
- U fabrici za pakovanje potrebno je 5,5 t hrane koja treba biti spakovana u pakete mase po 2 kg. Koliko će se dobiti paketa? Kolika je masa sve hrane u gramima?

Rješenje:

- Masa komada aluminijske ploče je: $7 \cdot 100 + 3 \cdot 10 = 700 + 30 = 730$ g.
- Masa u gramima je: $2,850 \text{ kg} = (2,850 \cdot 1000) \text{ g} = 2850$ g.
- Ukupna masa u gramima je: $5 \cdot 3,2 \text{ kg} = 16 \text{ kg} = 16\,000$ g.
Ukupna masa u tonama je: $16 \text{ kg} = 0,016$ t.
- Razlika između procjene i tačnog mjerenja je: $3,4 \text{ kg} - 3 \text{ kg} = 0,4 \text{ kg}$.
Da odredimo koliko je u procentima procijenjena masa u odnosu na tačnu masu, treba da odredimo količnik $3 : 3,4$, ali u ovom slučaju se dobija beskonačan decimalni broj, pa da izbjegnemo gubitak tačnosti zbog zaokruživanja rezultata, predstavimo dijeljenje kao količnik dvaju razlomaka, odnosno: $\frac{3}{1} : \frac{34}{10} = \frac{3}{1} \cdot \frac{10}{34} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$. U procentima imamo: $\frac{15}{17} \cdot 100 = \frac{1500}{17} = 88\frac{4}{17}\%$. Zapiši procenat kao decimalni broj sa dvije decimale: Ovo znači da je procjena Jane $\frac{15}{17} \cdot 100 = \frac{1500}{17} = 88\frac{4}{17}\%$ od tačno izmjerene mase.
- Broj paketa: $5,5 \text{ t} = 5500 \text{ kg}$, $5500 \text{ kg} + 2 \text{ kg} = 2750$ paketa.
Masa sve hrane u gramima: $5,5 \text{ t} = 5500 \text{ kg} = (5500 \cdot 1000) \text{ g} = 5\,500\,000$ g.

Zadatak 1

Ana treba da izmjeri masu paketa pšenice koristeći analognu vagu. Na skali vage kazaljka pokazuje 4 podjele po 1 kilogram i još 5 manjih podjela, pri čemu svaka podjela iznosi 100 grama. Kolika je ukupna masa paketa u kilogramima i u gramima?

Zadatak 2

Zoki je izmjerio masu 3 paketa čokolade. Prvi paket ima masu od 250 g, drugi 0,5 kg, a treći 300 g. Kolika je ukupna masa sva tri paketa u kilogramima?

Zadatak 3

Na polici u apoteci stoje kutije s različitim pakovanjima lijekova. Jedna kutija sadrži 14 tableta po 400 mg, druga kutija 10 tableta po 325 mg, a u trećoj kutiji ima 20 kesica po 15 g. Izračunaj ukupnu masu lijekova ako na toj polici ima po 10 kutija od svake vrste lijeka. Izrazi ukupnu masu u gramima, u dekagramima i u hektogramima.

Primjer 3

Jedna kutija čokolada ima masu od 2,5 kg. U magacinu ima 48 takvih kutija.

- Koliku masu u kilogramima imaju sve kutije zajedno?
- Pretvori ukupnu masu kutija u grame.
- Jedan kamion može nositi najviše 1,2 t tereta. Može li se ovaj teret prenijeti jednim kamionom? Ako ne, koliko tona će trebati da se transportuje dodatno drugim kamionom?

Rješenje:

- a) Masa svih kutija se dobija množenjem broja kutija s masom jedne kutije:

$$48 \cdot 2,5 = 120 \text{ kg}$$

- b) Ukupnu masu od 120 kg pretvaramo u grame:

$$120 \cdot 1000 = 120\,000 \text{ g}$$

- c) Da bismo odgovorili na ovo pitanje, prvo treba pretvoriti masu kamiona iz tona u kilograme:

$$1,2 \text{ t} = (1,2 \cdot 1000) = 1200 \text{ kg}$$

Zatim upoređujemo: $120 \text{ kg} < 1200 \text{ kg}$.

Da, cijeli teret se može prenijeti jednim kamionom jer je masa kutija manja od kapaciteta kamiona.

Zadatak 4

U fabrici brašna pakuju se vreće brašna od 4,75 kilograma svaka.

- Fabrika proizvede 650 vreća tokom jednog dana. Kolika je ukupna masa brašna u kilogramima?
- U jedan magacin može se skladištiti najviše 3,5 tona brašna. Mogu li se sve vreće proizvedene za jedan dan skladištiti u jedan magacin?
- Pretvori ukupnu masu brašna u višeimenu broj.

Kada bi radio/la u prodavnici ili magacinu, kako bi odlučio/la koju mjernu jedinicu (grami, kilogrami ili tone) da koristiš za različite proizvode? Objasni zašto je važno pravilno izabrati jedinice za masu u svakodnevnom životu.

Odgovori pitanja u tvojoj svesci.

1. Mogu li izračunavati ukupnu masu s različitim mjernim jedinicama (grami, kilogrami, tone)? Da / Djelimično / Ne
2. Razumijem li značenje svake mjerne jedinice i kada se koristi? Da / Djelimično / Ne
3. Jesam li uspio/la povezati znanje o mjernim jedinicama za masu s primjerima iz stvarnog života? Da / Djelimično / Ne
4. Šta bih mogao/la uraditi bolje sljedeći put da lakše rješavam ovakve zadatke?

Samostalni rad

1. Jedan paket brašna ima masu od 3,25 kg. Kolika je masa u hektogramima (hg), dekagramima (dag) i miligramima (mg)?
2. Ako jedna kutija čokolada ima masu 1,2 hg, na koliko takvih kutija bi se rasporedilo 6 kg čokolade?
3. Jedna plastična kutija s medom ima masu od 5,6 kg, a druga 4,75 kg. Kolika je ukupna masa u hg? Kolika je razlika u masi između dvije kutije u dag?
4. Koja je masa veća: 3,5 hg ili 3500 mg? Koliko puta je jedna masa veća od druge?
5. Jedan transportni paket sadrži 50 pakovanja putera, svako s masom od 250 g. Kolika je ukupna masa paketa u kilogramima i hektogramima?
6. Jedna velika tegla džema ima masu od 4,125 kg. Pretvori masu u dag, u g i u hg.
7. Procijeni koliku masu ima jedna prazna torba i zapiši odgovor u hg. Provjeri tačnost mjerenjem i izrazi masu u dag.
8. Komad drveta koji se koristi za izradu namještaja ima masu 15 hg. Pri obradi treba biti podijeljen na 3 jednaka dijela. Kolika će biti masa svakog dijela u kg?
9. Na vagi je prikazana masa od 0,875 kg. Zapiši je kao složeni broj.
10. Jedno transportno vozilo može prenijeti do 2 t. Koliko pakovanja s masom od 125 kilograma može nositi u jednom transportu?

Mjerenje i mjerne jedinice za zapreminu

Mjerenje zapremine je ključna vještina u svakodnevnom životu i u različitim profesionalnim oblastima. Počevši od mjerenja tečnosti u domaćinstvu, pa sve do složenih inženjerskih i naučnih procesa, tačnost i razumijevanje mjernih jedinica za zapreminu igraju značajnu ulogu. Ovom lekcijom ćeš se podsjetiti kako da čitaš skale na analognim i digitalnim mjernim instrumentima za zapreminu, kao što su menzure, digitalni mjerači i drugi instrumenti, i fokusiraćeš se na pretvaranje jedinica za zapreminu koristeći veze među njima. Ove vještine ne samo da će ti pomoći u procjeni i mjerenju, nego će te i pripremiti za realne situacije gdje su potrebni tačnost i efikasnost.

Primjer 1

Razgledaj mjerne instrumente za zapreminu. Koji je od njih precizniji?



Primjer 2

Jedna cisterna može da primi tačno 8 hektolitara (hl) tečnosti. Za transport, tečnost se pretače u manje posude s kapacitetom od 25 litara (l) svaka. Koliko je posuda s kapacitetom od 25 l potrebno da se isprazni cijela cisterna?

Rješenje:

Pretvaranje hektolitara u litre: $1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$, $8 \text{ hl} = (8 \cdot 100) \text{ l} = 800 \text{ l}$

Izračunavanje broja posuda: $800:25=32$ posuda.

Znači, potrebno je 32 posude da se isprazni cisterna.

Zadatak 1

Jedna fabrika proizvodi i pakuje različite proizvode, a ti si dio tima zaduženog za mjerenje i proračun dužine, mase i zapremine da bi se obezbijedila tačnost u proizvodnji i distribuciji.

1. Jedan paket proizvoda skladišti se u plastičnoj kutiji sa sljedećim dimenzijama: dužina: 0,25 dm, širina: 3,2 m i visina: 0,1 hm.

- a) Pretvori sve dimenzije u m i cm.
 - b) Izračunaj obim (perimetar) osnove kutije.
 - c) Procijeni da li kutija može stati u skladište s visinom od 1,5 dam.
- 2) Jedan proizvod ima masu od 450 g.
- a) Pretvori masu proizvoda u dag, hg i kg.
 - b) Ako u plastičnu posudu stane 250 proizvoda, izračunaj ukupnu masu svih proizvoda i uporedi je s dozvoljenom nosivošću kutije od 120 kg.
- 3) U plastičnu posudu može se staviti tečnost zapremine 3,24 hl. Koliko bi bilo potrebno boca od po 800 ml da se napuni plastična posuda?
- 4) Napiši sva mjerenja dobijena u 1), 2) i 3) kao jednoimene i višeimene brojeve. Provjeri da li su tvoje procjene tačne kroz mjerenja i pretvaranja. Koristi decimalne brojeve s tri decimale pri pretvaranjima.

Primjer 3

Elena želi da napravi domaći sok i da ga skladišti u boce i kante. Ona je pripremila 15 l soka. Kod kuće ima 5 boca zapremine po 750 ml, kao i 2 kante zapremine po 5 l.

- a) Da li će moći da skladišti sav sok u bocama i kantama? Ako ne, koliko soka će ostati?
- b) Jedna boca ima masu od 250 g kada je prazna. Sok zapremine 1 l ima masu od 1 kg. Ako se boca napuni s 1 litrom soka, kolika je ukupna masa boce kada je puna?
- c) Kolika će biti ukupna masa soka, praznih boca i praznih kanti ako svaka kanta ima masu od 1,5 kg?

Istraži odnos mase i zapremine, tj. kolika je masa tečnosti koja ima 1 litru zapremine. Taj odnos se može izraziti kao gustina. Možeš pitati i svog nastavnika fizike šta znači pojam gustina i u kojim mjernim jedinicama se izražava.

Rješenje:

- a) Zapremina 5 boca: $5 \cdot 750 \text{ ml} = 3750 \text{ ml} = 3,75$
 Zapremina 2 kante: $2 \cdot 5 \text{ l} = 10 \text{ l}$
 Ukupna zapremina: $3,75 \text{ l} + 10 \text{ l} = 13,75 \text{ l}$
 Ostatak soka: $15 \text{ l} - 13,75 \text{ l} = 1,25 \text{ l}$
 Ne može se skladištiti sav sok, ostat će 1,25 litara.
- b) Masa jedne pune boce:
 Masa prazne boce = 250 g
 Masa soka u boci (1 litar soka ima masu 1 kg) = 1000 g
 Ukupna masa = $250 \text{ g} + 1000 \text{ g} = 1250 \text{ g} = 1,25 \text{ kg}$
- c) Ukupna masa soka i posuda:
 Masa soka = volumen (litara) · masa 1 litra soka = $15 \cdot 1 = 15 \text{ kg}$
 Masa 5 boca: $5 \cdot 0,25 \text{ kg} = 1,25 \text{ kg}$
 Masa 2 kante: $2 \cdot 1,5 \text{ kg} = 3 \text{ kg}$
 Ukupna masa: $15 \text{ kg} + 1,25 \text{ kg} + 3 \text{ kg} = 19,25 \text{ kg}$

Zadatak 2

Ivan radi na projektu održavanja hidroponskog sistema – metoda uzgoja biljaka bez upotrebe zemlje. Sistem zahtijeva rezervoare za vodu i hranjive rastvore sa određenim volumenom. Ivan ima dva rezervoara, jedan volumena 18,5 l, a drugi volumena 12,75 l. On treba da napuni ukupno 40 l tečnosti u oba rezervoara i boce od po 1,25 l.

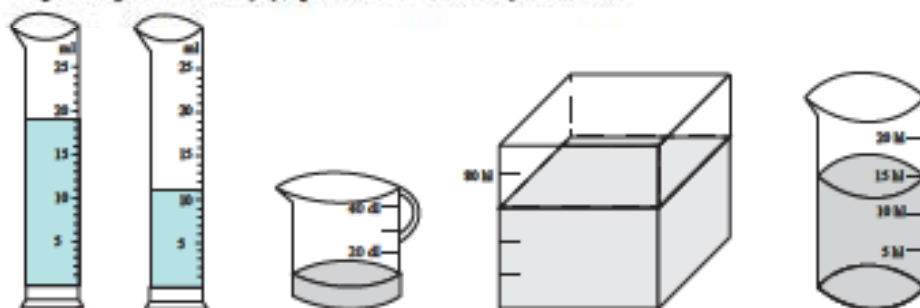
- Koliko boca volumena 1,25 l će mu biti potrebno da skladišti višak tečnosti koja neće stati u rezervoare?
- Ako Ivan želi da napuni rezervoar od 12,75 l do 75% njegovog ukupnog volumena, koliko litara će mu biti potrebno?
- Ako Ivan koristi odnos 3:2 za vodu i hranjivi rastvor, koliko litara svake tečnosti će dodati da napuni rezervoar od 18,5 l?

Zadatak 3

Jedan litar nafte ima masu 0,8 kg. U jedan rezervoar stane 400 kg nafte. Koliki je volumen rezervoara?

Zadatak 4

Zapiši zapreminu koji je prikazan na svakoj od slika:



Zadatak 5

Jovana priprema supu za porodicu. U receptu piše da joj je potrebno 2,5 l vode za supu. Ona ima digitalni mjerni instrument sa skalom u mililitrima i bokal maksimalnog volumena 1,2 l.

- Izračunaj koliko puta će morati da napuni bokal da dobije potrebnu količinu vode.
- Ako Jovana napuni bokal do maksimalnog volumena samo dva puta, koliko vode će nedostajati?
- Koristeći digitalni instrument, Jovana primjećuje da je u loncu u kojem priprema supu već bilo 750 ml vode. Koliko puta će dopuniti bokalom da ima dovoljno vode za supu?

Zamisli da si dizajner novih praktičnih posuda za svakodnevnu upotrebu, kao što su boce, bokali ili posude za kuhanje. Kako bi koristio svoja znanja o mjerenju i proračunu volumena da napraviš posude što preciznije, funkcionalnije i efikasnije za korisnike?

Da li bi izabrao analogne ili digitalne mjerne instrumente za provjeru njihovog kapaciteta?

Zašto?

Odgovori na pitanja u tvojoj svesci. Podijeli ih sa svojim drugom ili drugaricom iz razreda.

1. Koliko sam siguran/a u čitanju skala na analognim i digitalnim instrumentima za mjerenje volumena?
 - a) Vrlo siguran/a
 - b) Djelimično siguran/a
 - c) Trebam još vježbati
2. Da li mogu precizno pretvarati mjerne jedinice za volumen (npr. litre u mililitre, kubne centimetre u litre)?
 - a) Uvijek precizno
 - b) Ponekad pravim greške
 - c) Trebam ponoviti ovo gradivo
3. Kada koristim analogni ili digitalni instrument, da li mogu procijeniti da li je rezultat logičan?
 - a) Da, uvijek sam siguran/a
 - b) Ponekad sam nesiguran/a
 - c) Ne, ovo trebam poboljšati
4. Šta mogu uraditi da poboljšam svoje vještine za mjerenje i proračun volumena? (Napiši jedan korak koji ćeš poduzeti.)

Samostalni rad

1. Jedan rezervoar sadrži 3,25 kl vode. Pretvori volumen u hl, dal i l.
2. Rezervoar sa kapacitetom od 1,8 kl napunjen je do 75 % svog kapaciteta. Kolika je trenutna količina vode u dl i l?
3. Dva bazena imaju volumen od 2,35 kl i 1,75 kl, redom.
 - a) Koliki je ukupni volumen u hl?
 - b) Kolika je razlika u volumenu izražena u dal?
4. Koji je veći volumen: 4,5 hl ili 450 dal? Koliko puta je jedan volumen veći od drugog?
5. Jedna cisterna prima 12 dal nafte. Koliko litara prima jedan kanister, ako se iz cijele cisterne mogu napuniti 24 jednaka kanistera?
6. Procijeni koliki volumen ima jedna kanta vode i zapiši odgovor u dal. Provjeri tačnost mjerenjem i izrazi volumen u hektolitrima (hl).
7. Na digitalnoj skali prikazan je volumen od 0,435 kl.
 - a) Pretvori ga u hl, dal i l.
 - b) Zapiši ga kao višeimenovani broj.
8. Jedan akvarij sadrži 2,7 hl vode. Koliko litara vode sadrži akvarij?
9. Jedan proizvodni proces koristi 15 dal tečnosti dnevno. Koliko hl tečnosti će biti potrošeno za 30 dana?
10. Jedno transportno vozilo može nositi 6 hl tečnosti za jedno putovanje. Koliko kl tečnosti može prenijeti za 5 putovanja?
11. Jedna burad sa kapacitetom od 2,5 dal napunjena je do 80 %. Kolika je količina tečnosti u buretu u l?
12. Rezervoar sa kapacitetom od 1,2 kl prazni se u posude od po 12 l. Koliko posuda će biti potrebno da se isprazni cijeli rezervoar?
13. Jedno skladište ima 8 rezervoara, svaki sa kapacitetom od 3,75 hl. Koliki je ukupni volumen svih rezervoara u dal?
14. Kolika je razlika u volumenu između 5 kl i 450 dal? Izrazi razliku u hl.
15. Jedna posuda za skladištenje ima volumen od 0,625 hl.
 - a) Koliko dal i l iznosi ovaj volumen?
 - b) Napravi procjenu da li je dovoljan za skladištenje 700 l.

Vrijeme. 12-časovni i 24-časovni sistem

S ovom lekcijom ćeš se podsjetiti na znanja koja si stekao u prethodnom razredu o mjernim jedinicama za vrijeme, kao što su: sekunda, minuta, sat, dan, sedmica, mjesec, godina, decenija i vijek. Pri tome ćeš naučiti da koristiš veze među mjernim jedinicama za vrijeme za pretvaranje jednih u druge, kao i 12-časovni i 24-časovni sistem pri rješavanju problema iz svakodnevnog konteksta. Ova dva vremenska sistema najčešće se koriste u različitim kontekstima: 12-časovni sistem se koristi za svakodnevnu upotrebu, dok je 24-časovni sistem često korišten u zvaničnim dokumentima, transportu i kompjuterskim sistemima.

Primjer 1

Porodica Jovanović planira jednodnevno putovanje. Oni žele posjetiti zoološki vrt i muzej, a zatim imati ručak u restoranu. U tabeli je dat raspored i trajanje njihovih aktivnosti:

Aktivnost	Početno vrijeme	Krajnje vrijeme
Posjeta zoološkog vrta		
Posjeta muzeja		
Ručak u restoranu		

- Izračunaj ukupno vrijeme koje porodica Jovanović provodi na sljedećim aktivnostima:
 - Posjeta zoološkom vrtu
 - Posjeta muzeju
 - Ručak u restoranu
 Rezultate izrazi u minutama.
- Ana, najmlađi član porodice, zapisala je vremena iz tabele digitalnim zapisom. Kako će ista vremena biti zapisana analognim zapisom? Ukratko opiši razlike između čitanja digitalnog i analognog sata.
- Porodica je odlučila da nastavi s aktivnostima još 2 sata i 45 minuta nakon ručka. Koliko je tada sati?

Rješenje:

- a) Za posjetu zoološkom vrtu od 10 sati i 30 minuta do 12 sati ima 1 sat i 30 minuta ili 90 minuta. Za posjetu muzeju, porodica Jovanović provela je od 12 sati i 30 minuta do 14 sati, odnosno 1 sat i 30 minuta ili 90 minuta. Za ručak u restoranu, odvojili su vrijeme od 14 sati i 30 minuta do 15 sati i 30 minuta, odnosno 1 sat ili 60 minuta.

b)

Aktivnost	Početno vrijeme	Krajnje vrijeme
Posjeta zoološkom vrtu		
Posjeta muzeja		
Ručak u restoranu		

- c) Posljednja aktivnost porodice Jovanović je do 15 sati i 30 minuta. Porodica je nastavila još 2 sata i 45 minuta. $(15 + 2) \text{ h} + (30 + 45) \text{ min} = 17 \text{ h} + 75 \text{ min} = 18 \text{ h } 15 \text{ min}$. Tada je 18 sati i 15 minuta.



Dodatni izazov: Koliko decenija ima u 200 godina?

Zadatak 1

Učenici iz jednog sportskog kluba se pripremaju za sportsko takmičenje. Njihov trener im je pripremio raspored za trening i aktivnosti za jedan dan. U tabeli je prikazan raspored:

Aktivnost	Početno vrijeme	Krajnje vrijeme
Jutarnje zagrijavanje	07:45	08:30
Trening na terenu	09:00	10:15
Odmor	10:15	10:45
Podnevni trening	14:00	15:30

- Od kakvog sata je prikazano vrijeme u tabeli?
- Izračunaj trajanje svake aktivnosti izraženo u:
 - Minute
 - Sate (u decimalnom obliku, na primjer: 1,5 sati)
- Koliko vremena učenici provode u aktivnom treningu tokom dana? Odgovori u satima i minutama.
- Nadi ukupno vrijeme svih aktivnosti (uključujući i odmor) izraženo u satima i minutama.
- Ako trening na terenu traje 20 % duže od prvobitno planiranog vremena, koliko će biti novo krajnje vrijeme ove aktivnosti?

Dodatni izazov:

Koliko sedmica ima u 2 godine i 4 mjeseca?

Zadatak 2

Marko je napravio plan za svoje obaveze tokom jedne sedmice. On je pažljivo izračunao vrijeme koje troši na različite aktivnosti svaki dan. Evo podataka za njegove dnevne aktivnosti:

Aktivnosti	Vrijemetrajanja (u min.)
Učenje	120
Sportski trening	90
Igranje sa drugarima	45
Čitanje knjiga	30
Gledanje televizije	60

Marko obavlja iste aktivnosti svaki dan od ponedjeljka do petka, dok za vikend ne radi ove aktivnosti.

- Izračunaj koliko vremena Marko troši na učenje, sportski trening, igranje s drugarima, čitanje knjiga i gledanje televizije za pet radnih dana zajedno. Izrazi vrijeme u:
 - Minutima
 - Satima
- Izračunaj koliko vremena Marko provodi na učenju za:
 - 1 mjesec (30 dana)
 - 1 godinu (365 dana).
- Pretvori ukupno vrijeme koje Marko troši na sportski trening za pet radnih dana iz minuta u sate.
- Ako Marko odluči dodati još 15 minuta za čitanje knjiga svaki dan, koliko vremena (u satima i minutama) će trošiti sedmično na ovu aktivnost?

Dodatni izazov:

Marko planira učiti 40 % svog vremena tokom vikenda da nadoknadi svoje obaveze. Ako vikend traje 48 sati, koliko vremena (u satima i minutama) će potrošiti na učenje?

Zadatak 3

- Trebaš napraviti eksperiment koji traje 2 sata i 45 minuta. Koliko sekundi traje eksperiment?
- Ako putuješ na odmor i taj odmor traje 5 dana i 6 sati, koliko će biti vrijeme odmora u satima?
- Ako si na svom mobilnom telefonu razgovarao ukupno 120 minuta tokom sedmice, koliko sati će to biti?

Primjer 2

Raspored za školske aktivnosti

Tomislav i Ana su učenici u istoj školi. Njihov školski raspored je sljedeći:

- Časovi iz matematike počinju u 8 sati i 30 minuta i traju 45 minuta.
 - Nakon toga slijedi pauza od 15 minuta.
 - Slijedi čas fizike od 9.30 do 10.15.
 - Ručak počinje u 12:00 i traje 45 minuta.
 - Posljednji čas počinje u 15:00 i traje 1 sat.
- Zapiši u 12-satnom sistemu vrijeme kada počinje čas matematike i vrijeme kada počinje posljednji čas.
 - Zapiši vrijeme za sve aktivnosti u 24-satnom sistemu (početak časa matematike, pauza, čas fizike, ručak, posljednji čas).
 - Ako se Tomislav i Ana trebaju vratiti kući poslije posljednjeg časa i autobus polazi u 16:00 sati, u kojem sistemu je jasnije prikazati to vrijeme i zašto?

Rješenje:

- Čas matematike počinje u 8.30 ujutro.

Posljednji čas počinje u 3 sata poslijepodne.

U 12-satnom sistemu vrijeme je podijeljeno na dva perioda: od ponoći do podneva (0.00 do 11.59) i od podneva (12.00 do ponoći 11.59). Sat zapisujemo s tačkom između sati i minuta i: za period od ponoći do podneva, uz sat pišemo ili izgovaramo riječi „ujutro“ ili „prije podne“, a za period od podneva do ponoći, uz sat pišemo ili izgovaramo riječi „poslijepodne“ ili „navečer“.

U 24-satnom sistemu, vrijeme je u jednom periodu, od 00:00 sati do 23:59 sati. Sati se pišu s četiri cifre, tako da su sati i minute odvojeni s dvije tačke (:), odnosno pišemo 00:00, 01:00, 02:00, ..., 11:00, 12:00, 13:00, ..., 17:00, 18:00, ..., 22:00, 23:00.

b) Matematika od 08:30 do 09:15, pauza od 09:15 do 09:30, fizika od 09:30 do 10:15, ručak od 12:00 do 12:45, posljednji čas od 15:00 do 16:00.

c) Autobus polazi u 16:00 sati. U 12-satnom sistemu ovo vrijeme će biti 4.00 poslije podne. U 24-satnom sistemu to je 16:00.

Može se zaključiti da:

- Analogni satovi prikazuju vrijeme u 12-satnom sistemu.
- Digitalni satovi mogu prikazivati vrijeme u:
 - 12-satnom sistemu i tada prikazuju vrijeme tako da su sati i minute odvojeni sa dvije tačke (:) i skraćenicama AM (ante meridiem, za period od 0:00 do 11:59 sati), PM (post meridiem, za period od 12:00 do 11:59).
 - 24-satnom sistemu i tada prikazuju vrijeme sa četiri cifre, tako da su sati i minute odvojeni sa dvije tačke (:).



Zadatak 4

Zapiši u svoju svesku ova vremena iz 12-satnog u 24-satni sistem:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|
| a) 5:30 ujutro | b) 11:20 prijepodne |
| c) 4 sata i 35 minuta poslije podne | d) 9 sati i 50 minuta navečer |

Zadatak 5

Zapiši u svoju svesku ova vremena iz 24-satnog u 12-satni sistem:

- a) 13:45 b) 00:30 c) 17:00 d) 23:15

Primjer 3

Marko planira putovanje od Skoplja do Ohrida. On mora znati kada polazi autobus i kada će stići u Ohrid.

Autobus polazi iz Skoplja u 11:30.

Autobus stiže u Ohrid u 2:15 poslije podne.

- U 12-satnom sistemu, koje će biti vrijeme polaska autobusa?
- U 24-satnom sistemu, kada će stići autobus u Ohridu?
- Koliko vremena će trajati putovanje?



Rješenje:

- U 12-satnom sistemu vrijeme kada polazi autobus je 11:30 prijepodne.
- U 24-satnom sistemu vrijeme kada autobus stiže u Ohrid je 14:15.
- Putovanje počinje u 11:30 prijepodne, znači 30 minuta u prvoj polovini dana i završava u 2:15 poslije podne, znači još 2 sata i 15 minuta u drugoj polovini dana. Ukupno putovanje traje: $2\text{ h }15\text{ min} + 30\text{ min} = 2\text{ h }45\text{ min}$. Kako ti je lakše da računaš, u 12-satnom ili u 24-satnom sistemu?

Zadatak 6

Školska ekskurzija će se održati 12. maja. Pogledaj raspored za taj dan:

- Autobus treba da krene iz škole u 8:00 prijepodne.
 - Naučna posjeta će početi u 9:30 ujutro, a završit će u 1:45 poslije podne.
 - Ručak će početi u 14:00 i trajat će 45 minuta.
 - U 3:00 poslije podne počinje posljednja aktivnost i trajat će do 17:00.
 - Autobus kreće nazad u 6:15 poslije podne.
- Pretvori vrijeme polaska autobusa iz 12-satnog sistema u 24-satni sistem.
 - Koliko traje naučna posjeta?
 - Izračunaj koliko slobodnog vremena ćeš imati poslije ručka do početka posljednje aktivnosti?

Razmisli o situaciji kada radiš u timu i svi koriste različite vremenske sisteme. Kako ćeš uskladiti vrijeme da ne dođe do zabune? Napiši plan kako ćeš sinhronizirati vremenske sisteme u radnom okruženju.

Napiši kratak esej o tome kako različiti vremenski sistemi mogu biti od koristi u svakodnevnom životu.

Samostalni rad

1. Porodica Petrovski planira jednodnevno putovanje za vikend. Oni planiraju da posjete sljedeće lokacije:

Lokacija	Rastojanje (u km)	Minulo vrijeme za putovanje do lokacije (u minutima)	Vrijeme za prestop (u minutima)
Etnoselo	50	60	90
Nacionalni park	30	40	120
Lokalni restoran	20	30	60

Oni će krenuti od kuće tačno u 9:00 sati ujutro.

- Izračunaj koliko će vremena porodica provesti na putovanju do svih lokacija. Izrazi vrijeme u satima i minutama.
- Koliko ukupno vremena će provesti na putovanju i boravku za svaku lokaciju?
- Ako porodica odluči da smanji vrijeme boravka u nacionalnom parku za 30 minuta, koliko će im ostati za dodatne aktivnosti?
- Izrazi vrijeme putovanja između svih lokacija (uključujući i povratak kući) u sekundama.
- Koliko kilometara su tog dana prešli?
- Napiši druga pitanja na koja možeš odgovoriti koristeći tabelu.

Dodatni izazov:

Porodica Petrovski planira ponovo posjetiti etno selo nakon jedne godine. Ako je naredna godina prestupna godina, koliko će dana proći od dana ovog putovanja do njihovog sljedećeg?

2. Ana organizuje rođendansku zabavu i želi da sve bude pripremljeno na vrijeme. Ona je napravila raspored za pripreme i za aktivnosti tokom zabave. U tabeli ispod dati su njeni planovi:

Aktivnost	Početno vrijeme	Vrijemetrajanja
Dekoriranje prostora	14:30	1 sat i 15 minuta
Priprema hrane	15:45	2 sata i 20 minuta
Rodendanska zabava	18:15	3 sata
Čišćenje poslije zabave	21:30	1 sat i 45 minuta

- 
- a) Izračunaj krajnje vrijeme svake aktivnosti. Rezultate zapiši u digitalnom 12-satnom formatu (sati: minute).
 - b) Koliko vremena Ana će provesti u pripremi prije početka zabave? Izrazi vrijeme u minutama.
 - c) Ako Ana želi započeti s pripremama tačno 5 sati prije zabave, koliko je sati kada treba početi?
 - d) Zapiši vremena iz tabele na analognom satu. Opiši kako izgledaju kazaljke za početak i za kraj svake aktivnosti.
 - e) Koliko ukupno vremena (u satima i minutama) je potrebno za sve aktivnosti zajedno?
 - f) Ana je odlučila skratiti 30 minuta od pripreme hrane. Koliko vremena sada će imati za odmor prije nego što počne zabava?

Dodatni izazov:

Ako Ana planira proslaviti svoj rođendan i sljedeće godine, izračunaj koliko sedmica ima do njenog sljedećeg rođendana.

Pažljivo pročitaj svaki zadatak i riješi ga. Zapiši korake koje ćeš napraviti da dobiješ tačan odgovor.

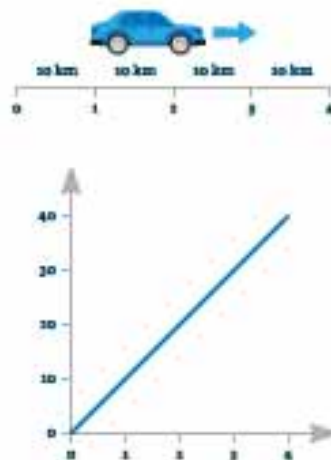
- 3. Pretvori 150 minuta u sate i minute.
- 4. Pretvori 48 sati u dane.
- 5. Koliko sedmica ima u 15 dana?
- 6. Pretvori 6 sedmica u mjesece (pretpostavi da u prosjeku ima 4 sedmice u mjesecu).
- 7. Koliko godina ima u 3 decenije?
- 8. Pretvori 500 sekundi u minute i sekunde.
- 9. Koliko sedmica ima u 10 080 minuta?
- 10. Koliko sekundi ima u 3 sata?
- 11. Pretvori 730 dana u godine.
- 12. Šta je veće: 3 sata i 30 minuta ili 210 minuta? Objasni.
- 13. Vera planira raditi na projektu od 11:00 prijepodne do 5:30 poslije podne. Pretvori vrijeme u 24-satni sistem i izračunaj koliko vremena će provesti na projektu.

14. Vasil i njegova porodica putuju iz Beograda, Srbija, do Njujorka, SAD. Let je iz Beograda u 10 sati prijepodne po lokalnom vremenu. Let traje 10 sati i stiže u Njujork u 22:00 sata po lokalnom vremenu.
- U kojem vremenskom periodu će stići u Njujork u 12-satnom sistemu?
 - Izračunaj razliku u vremenskim zonama između Beograda i Njujorka.
15. Tvoj školski autobus stiže na stanicu u 10 sati prijepodne. Ako se autobus zatim vraća na istu stanicu za 3 sata i 20 minuta, kada će stići nazad? Zapiši vrijeme dolaska u 12-satnom i u 24-satnom formatu.
- 16*. Jana učestvuje na međunarodnom sastanku koji će se održati između tri grada: Tokio (Japan), London (Ujedinjeno Kraljevstvo) i Sidnej (Australija). Na sastanku prisustvuju učesnici iz ovih triju gradova. Sastanak će početi u 09:00 sati u Tokiju 1. marta. Istraži na internetu vremenske zone (Tokio, London, Sidnej).
- Pretvori vrijeme početka sastanka u vrijeme za London i Sidnej.
 - Kolika je vremenska razlika između Tokija i Sidneja?

Proračun vremenskih intervala i rad sa grafikonima

U ovoj lekciji podsjetit ćeš se kako da izračunavaš vremenske intervale koristeći različite grafikone i rasporede, od svakodnevnih do složenijih primjera. Vremenski intervali su od suštinskog značaja za organizovanje vremena, naročito kada radiš sa rasporedima događaja, planovima, transportom i drugim aktivnostima.

U ovoj lekciji naučit ćeš kako da koristiš vremenske grafikone i kako da računaš vremenske intervale, što je važan dio planiranja i organizovanja svakodnevnog života.



Primjer 1

Tim učenika planira školsku ekskurziju koja će trajati 4 dana. Svaki dan ima različan raspored aktivnosti, kao što je dato u tabeli:

Aktivnosti po danima:

Dani	Aktivnosti i vrijeme za odmor		
	Početak aktivnosti	Odmor	Kraj aktivnosti
Prvi	09:00	12:00 - 12:30	16:30
Drugi	08:30	13:00 - 13:30	17:00
Treći	09:00	12:00 - 12:30	15:30
Četvrti	08:00	11:00 - 11:30	14:00

- Koliko vremena će proći od početka aktivnosti (prvi dan, 09:00) do kraja posljednjih aktivnosti (četvrti dan, 14:00)? Izračunaj vrijeme u satima i minutama.
- Koristi raspored za 24 sata i izračunaj koliko će biti cjelih sati aktivnosti za svaki dan.
- Ako raspored za ekskurziju počinje 15. maja, kada će ekskurzija završiti prema kalendaru?

Rješenje:

- Prvi dan: 7 sati i 30 minuta. Drugi dan: 8 sati i 30 minuta. Treći dan: 6 sati i 30 minuta. Četvrti dan: 6 sati. Ukupno: 27 sati i 90 minuta = 28 sati i 30 minuta.
- Prvi dan: 7 sati. Drugi dan: 8 sati. Treći dan: 6 sati. Četvrti dan: 6 sati.
- Početak 15. maja, kraj 18. maja.

Zadatak 1

Zadužen/a si da organizuješ događaj za vikend. Dnevni raspored događaja izgleda ovako:

- Početak događaja: 09:00
- Prva pauza: 10:30 - 11:00
- Druga pauza: 13:00 - 14:15
- Završetak događaja: 16:00

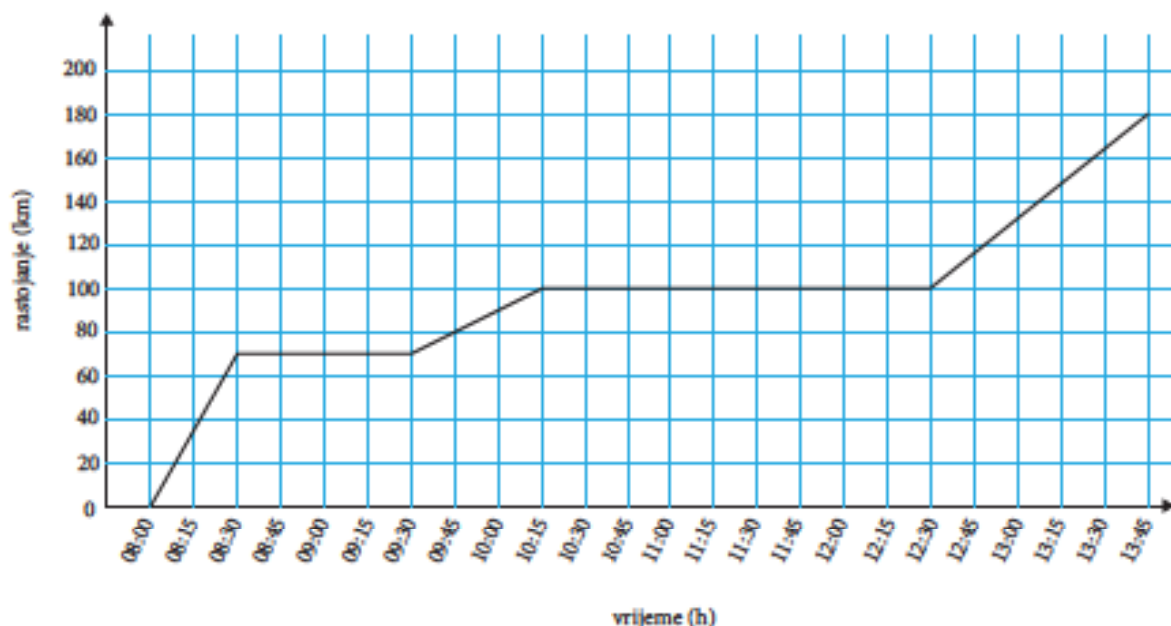
- Koliko će trajati događaj bez pauza?
- Koliko je vremena planirano za pauze?
- Izračunaj vremenski interval između početka i kraja događaja. Zapiši vrijeme trajanje u minutama.

Primjer 2

Igor putuje od Skoplja do Bitole sa usputnim pauzama. Iskoristi grafikon da popuniš tabelu s rasporedom njegovih aktivnosti tokom putovanja, a zatim da izračunaš.

Pređeno rastojanje po satima:

Igorovo putovanje



a) Precrtaj tabelu u svoju svesku.

Aktivnost	Vrijeme u 24-zapisu
Prvi dio putovanja	
Prvo stajanje za kratki odmor	
Drugi dio putovanja	
Drugo stajanje za ručak	
Treći dio putovanja	

- U koliko sati je Igor napravio prvu pauzu i koliko je ona trajala?
- Koliko se vremena Igor zadržao na ručku?
- Koliko ukupno vremena i koliko kilometara je Igor prešao putujući od Skoplja do Bitole?
- Koliko je kilometara Igor prešao prije nego što je stao na ručak?
- Ako Igor nije uopće stajao, koliko bi trajalo putovanje?

Rješenje:

a) Tabela – Vrijeme aktivnosti u 24-satnom zapisu

Aktivnost	Vrijeme u 24-zapisu
Prvi dio putovanja	08:00-08:30
Prvo stajanje za kratki odmor	08:30-09:30
Drugi dio putovanja	09:30-10:15
Drugo stajanje za ručak	10:15-12:30
Treći dio putovanja	12:30-13:45

- b) Prvu pauzu Igor je napravio u 08:30 i ona je trajala do 09:30, odnosno 1 h ($9\text{ h }30\text{ min} - 8\text{ h }30\text{ min} = 1\text{ h}$).
- c) Ručak je započeo u 10:15, a završio u 12:30.
Znači, trajao je $12\text{ h }30\text{ min} - 10\text{ h }15\text{ min} = 2\text{ h }15\text{ min}$.
- d) Da bismo izračunali ukupno vrijeme provedeno u putovanju, možemo pročitati s grafikona (ili iz tabele) krajnje vrijeme dolaska i vrijeme polaska, a zatim izračunati razliku, odnosno: $13\text{ h }45\text{ min} - 8\text{ h} = 5\text{ h }45\text{ min}$. S grafikona čitamo i krajnju vrijednost za kilometre na kraju putovanja u 13:45, pri čemu kilometre očitavamo na y-osi.
Tako zaključujemo da je Igor prešao 180 kilometara.
- e) S grafikona čitamo da je u 10:15, prije nego što je stao na ručak, Igor imao pređenih 100 kilometara.
- f) Ako Igor uopće nije stajao, vrijeme putovanja može se izračunati na dva načina:
– ili da saberemo sve vremenske intervale kretanja,
– ili da od ukupnog vremena putovanja oduzmemo dva vremenska intervala kada je Igor stajao na pauzu i na ručak. Ovdje računamo na drugi način:
 $5\text{ h }45\text{ min} - (1\text{ h} + 2\text{ h }15\text{ min}) = 5\text{ h }45\text{ min} - 3\text{ h }15\text{ min} = 2\text{ h }30\text{ min}$.

Zadatak 2

Prikaži grafikom promjenu tjelesne temperature koju je Enes imao tokom jednog dana dok je imao prehladu. Sa grafikona odredi:

- a) Koliko je vremena imao temperaturu iznad $38\text{ }^{\circ}\text{C}$?
b) U koliko sati mu se temperatura smanjila na $36\text{ }^{\circ}\text{C}$?
c) Koju tjelesnu temperaturu je imao najduže tokom dana?
d) U 10:30 je uzeo tabletu protiv visoke temperature. Koliko je minuta prošlo dok je temperatura pala na $37,5\text{ }^{\circ}\text{C}$?

Temperatura prema satima:

Vrijeme (h)	Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
7:00	37
9:30	38
14:15	39
18:00	38
21:00	37,5
21:30	37
22:30	36

Primjer 3

Planiranje putovanja. Ti i tvoja porodica planirate da putujete iz svog grada do planinskog odmarališta za vikend. Plan je da se putovanje odvija na sljedeći način: jedan dio automobilom, a drugi dio autobusom. Pritom želite napraviti jednu pauzu u dijelu putovanja automobilom i ne smijete propustiti autobus. Da biste napravili procjenu vremena putovanja, koristite raspored aktivnosti i grafikon:

- Koliko će ukupno trajati putovanje od tvog grada do planinskog odmarališta?
- Koliko vremena prolazi između dolaska na autobusku stanicu i početka autobusnog prevoza?
- Kako biste putovali ako želite stići u odmaralište ranije? Koji dio putovanja biste skratili?
- Izračunaj koliko je ukupno vrijeme vožnje od početka putovanja do dolaska u odmaralište.
- Koliko će minuta kasnije početi putovanje ako se umjesto u 08:00 automobilom krene u 08:45? Ako nema usputnih pauza, hoćete li stići na autobusku stanicu na vrijeme prije polaska autobusa?



Rješenje:

- Ukupno vrijeme putovanja je: $14 \text{ h } 30 \text{ min} - 8 \text{ h} = 6 \text{ h } 30 \text{ min}$.
- Vrijeme između dolaska na autobusku stanicu i početka autobusnog prevoza: $12 \text{ h } 30 \text{ min} - 12 \text{ h} = 30 \text{ min}$.
- Ako želite stići ranije, može se skratiti vrijeme pauza i zamijeniti drugi dio putovanja – umjesto autobusom, da bude automobilom. Sa grafikona je očigledno da je putovanje automobilom brže – za iste ili kraće vremenske intervale automobilom se prelaze veće udaljenosti nego autobusom.
Na primjer: autobusom se za 2 h prelazi 80 km, dok se automobilom u prvom dijelu prelazi 100 km za 1 h 30 min, a poslije pauze 170 km za 2 h.
- Ukupno vrijeme vožnje je ukupno vrijeme putovanja bez pauza i čekanja autobusa, odnosno: $6 \text{ h } 30 \text{ min} - (30 \text{ min} + 30 \text{ min}) = 6 \text{ h } 30 \text{ min} - 1 \text{ h} = 5 \text{ h } 30 \text{ min}$.
- Putovanje će početi 45 minuta kasnije, odnosno u 8 h 45 min. Ako pri putovanju automobilom nema usputne pauze (zaustavljanja), tada ćeš moći stići sa svojom porodicom prije polaska autobusa.

Zadatak 3

Dat je vozni red za vozove od Skoplja do Velesa. Prikaži ga grafikonom.

- Koliko vremena putuje voz od Lisičja do Velesa?
- Koliko vremena mu je potrebno da voz stigne od Skoplja do Velesa?
- Između koje dvije stanice put najduže traje i koliko?
- Između koje dvije stanice se stiže za najkraći vremenski interval?
- Ima li stanica između kojih putovanje traje isto vrijeme?
- Koliko kilometara je rastojanje od Dračeva do Velesa?

Tabela – Provedeno vrijeme i rastojanje od jednog do drugog mjesta

Mjesto	Vrijeme	Provedeno vrijeme (km)
Skoplje	06:20	0
Lisiče	06:31	5
Dračevo	06:37	13
Orešani	06:48	25
Veles	07:25	55

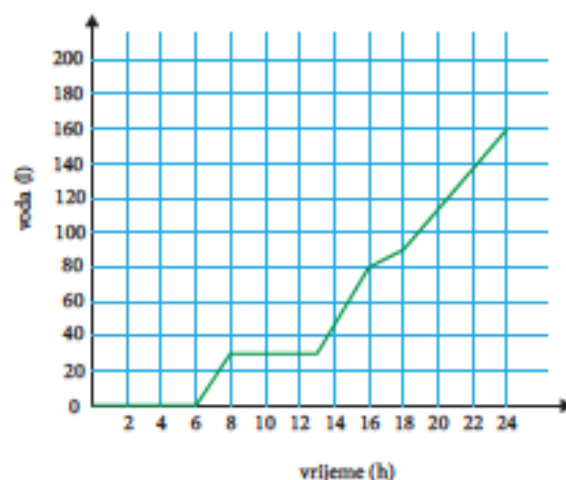
Zadatak 4

Grafik prikazuje potrošnju vode porodice Petrovski tokom jednog dana

- Koliko ukupno litara je potrošeno tokom cijelog dana?
- U kojim vremenskim intervalima je potrošeno više od 30 litara? Koliko je to ukupno sati?
- U kojem periodu dana se troši najviše vode?
- Koliko sati tokom dana ima potrošnja manja od 30 litara?
- Izračunaj kolika bi bila potrošnja vode za jedan mjesec ako bi dati podaci vrijedili za svaki dan u mjesecu.
- Ako 1000 litara vode košta 40 denara, koliki bi bio mjesečni račun ove porodice?
- Koje aktivnosti bi izazvale veću potrošnju vode u različitim dijelovima dana?
- Pogledaj račun za vodu svoje porodice i razmisli kako možemo štedjeti vodu, a time i novac koji plaćamo za vodu?

Potrošnja vode u vremenskim periodima

Potrošena voda porodice Petrovski



Razmisli o važnosti tačnog izračunavanja vremenskih intervala. U kojoj situaciji iz tvog života smatraš da je tačno izračunavanje vremenskih intervala najvažnije?
Napiši konkretan primjer iz svoje svakodnevnice gdje će ti prethodno naučeno znanje pomoći da organizuješ neke aktivnosti.

Zapiši u svoju svesku odgovore na sljedeća pitanja. Ocijeni se od 1 do 4, gdje:

- 1 – Ne mogu da riješim problem.
 - 2 – Mogu da riješim neke zadatke, ali mi je potrebna pomoć.
 - 3 – Mogu samostalno da riješim zadatke i da objasnim osnovne koncepte.
 - 4 – Lako rješavam zadatke, mogu da objasnim sve korake i da ih primijenim u svakodnevnim situacijama.
-
1. Mogu da čitam i razumijem raspored i da ga primijenim za izračunavanje vremenskih intervala.
 2. Mogu tačno da izračunam vremenske intervale između različitih aktivnosti koristeći različite jedinice (sekunde, minute, sati, dani, sedmice).
 3. Uspijevam da razumijem i koristim grafikone za izračunavanje vremenskih intervala.
 4. Mogu da primijenim raspored i izračunavanje vremenskih intervala u realnim situacijama, kao što su organizovanje radnog dana ili raspored aktivnosti.

U zavisnosti od tvoje samoprocjene, razmisli koje oblasti možeš da unaprijediš. Ako si se ocijenio u nekoj tvrdnji sa 1 ili 2, ponovo pogledaj zadatke koji se odnose na tu tvrdnju i potraži dodatnu pomoć za bolje razumijevanje.

Samostalni rad

- Najavljen je autobus koji treba da krene iz tvoga grada u 10:25 i da stigne u susjedni grad u 14:00. Koliko će trajati putovanje? Izračunaj vremenski interval i zapiši ga u satima i minutama.
- Raspored časova u jednom tvom školskom danu izgleda ovako:
 - Izračunaj vremenski interval između početka prvog i kraja posljednjeg časa.
 - Koliko vremena, u satima i minutama, provodiš u školi od početka do kraja posljednjeg časa?
- Isplaniraj raspored za 5 različitih aktivnosti tokom dana (na primjer: istraživanje, pisanje, pauza, korekcija, završavanje). Izračunaj koliko ukupno vremena će ti trebati da završiš sve aktivnosti.
- Ana planira putovanje:
 - Krenut će 10. marta i ostat će na putovanju 12 dana.
 - Zatim će biti kod kuće 5 dana prije nego što ponovo krene na putovanje koje će trajati 8 dana.
 - Kojeg datuma će se A na vratiti s prvog putovanja?
 - Kada će završiti drugo putovanje?
- U školi postoji zimski raspust koji traje 3 sedmice. Počinje 20. decembra. Učenici se vraćaju u školu prvog ponedjeljka poslije raspusta.
 - Kojeg datuma završava raspust?
 - Koji je datum prvog školskog dana??
- Filmska ekipa ima raspored aktivnosti za snimanje scena dat u sljedećoj tabeli:
 - Koliko ukupno traju sva snimanja?
 - Koliko ukupno vremena imaju za odmor i ručak?

Raspored časova

Čas	Vrijeme početka i posjete časa
1	08:00-08:45
2	09:00-09:45
3	10:00-10:45
4	11:00-11:45
5	12:00-12:45
6	13:00-13:45

Potrebno vrijeme za snimanje scena

Snimanje scene 1	08:30-10:15
Odmor	10:15-10:45
Snimanje scene 2	10:45-12:00
Ručak	12:00-13:00
Snimanje scene 3	13:00-15:30

7. Ivana radi na projektu koji traje 90 dana i počinje 1. februara. Projekat je podijeljen na 3 jednake faze.

- Koliko dana traje svaka faza?
- Kojeg datuma završava svaka od faza?
- Kada će završiti cijeli projekat?

Napravi proračune za običnu (neprijestupnu) i za prijestupnu godinu.

8. Raspored vozova:

- Voz 1: Polazi iz Skoplja u 08:20 i stiže u Velesu u 09:05.
- Voz 2: Polazi iz Velesa u 09:20 i stiže u Gevgeliju u 11:15.

- Koliko traje vožnja voza 1 od Skoplja do Velesa?
- Koliko dugo putnik čeka na stanici u Velesu da uhvati voz 2, ako je prije toga putovao vozom 1?
- Koliko ukupno vremena treba putniku od Skoplja do Gevgelije, uključujući vrijeme čekanja?

Perimetar trougla i četverougla

U svakodnevnom životu često se susrećeš s pitanjem određivanja perimetra oblika kao što su trouglovi, četverouglovi ili drugi mnogouglovi.

Perimetar predstavlja ukupnu dužinu svih stranica jednog oblika.

U ovoj lekciji ćeš se podsjetiti osnovnih pojmova i naučiti kako da izračunaš perimetar trouglova i četverouglova u različitim situacijama.



Primjer 1

Pomažeš u uređenju cvjetne bašte nepravilnog oblika, koja ima 6 strana. Odlučeno je da se postavi niska drvena ograda oko bašte da bi se zaštitilo cvijeće. Dužine strana bašte su: 2 m, 3 m, 4 m, 3 m, 5 m i 4 m.

- Ograda se prodaje u pakovanjima od 10 m. Koliko pakovanja ograde će trebati da kupiš?
- Ako jedno pakovanje košta 500 denara, koliko novca ćeš potrošiti?
- Ako treba da urediš baštu tako da strane budu jednake (npr. pravilan šesterougao), kolika će biti dužina svake strane ako perimetar ostane isti?

Rješenje:

- Da odrediš ukupnu dužinu ograde koju treba postaviti, saberi dužine svih strana:
 $2 + 3 + 4 + 3 + 5 + 4 = 21$ m. Ako se ograda prodaje u pakovanjima od 10 m, za 21 m biće potrebna 2 pakovanja (20 m), ali nedostaje još 1 m. Znači, treba kupiti 3 pakovanja.
- Ako jedno pakovanje košta 500 denara, tri pakovanja će koštati 1500 denara.
- Ako je mnogougao pravilan šesterougao, tada su njegove stranice jednake dužine koju možemo označiti sa a , a perimetar se može izračunati po formuli: $L = 6 \cdot a$. Prema uslovu zadatka, perimetar pravilnog mnogougla jednak je perimetru šesterougla iz tačke a), pa imamo: $6 \cdot a = 21$ m, $a = 21 : 6 = 3,5$ m.

Zadatak 1

Zamisli da organizuješ takmičenje na atletskoj stazi. Staza ima nepravilni oblik sa 6 strana, a dužine strana su: 10 m, 15 m, 12 m, 20 m, 18 m i 25 m.

- Kolika je ukupna dužina staze koju će trebati da istrče takmičari?
- Ako se takmičenje sastoji od 5 prolazaka stazom, kolika će biti ukupna dužina koju će preći svaki od takmičara?
- Da bi obilježio stazu trakom, kupuješ pakovanja od 50 m trake. Koliko pakovanja trake će biti potrebno za cijelu stazu?
- Ako treba da dodaš još jednu stranu da bi stazu napravio sa 7 strana, kolika bi bila dužina te strane ako želiš da ukupni perimetar bude tačno 110 m?

Primjer 2

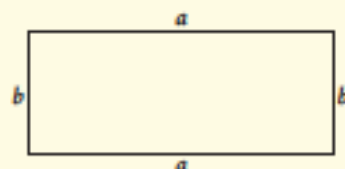
Ajše organizuje izlet u parku i želi da postavi dekorativnu traku oko prostora gdje će sjediti sa svojim drugaricama. Prostor za izlet ima pravougaoni oblik sa stranicama dugim 6 m i 4 m. Osim toga, odlučila je da postavi i manji trougaoni prostor za igru, čije su stranice 3 m, 4 m i 5 m. Koliko dekorativne trake treba Ajše?

Rješenje:

Da bi se izračunalo koliko dekorativne trake treba Ajše za pravougaoni prostor za sjedenje, računa se perimetar pravougaonika:

Perimetar pravougaonika = $2 \cdot \text{dužina} + 2 \cdot \text{širina}$ ili perimetar pravougaonika = $2 \cdot (\text{dužina} + \text{širina})$. Zašto?

Perimetar se najčešće označava slovom L . Ako dužinu i širinu pravougaonika označimo, na primjer, sa a i b , tada se perimetar pravougaonika može zapisati formulom: $L = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ ili $L = 2 \cdot (a + b)$.



Perimetar prostora u kojem će Ajše sjediti sa drugaricama je:

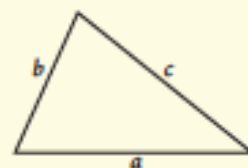
$$L = 2 \cdot (6 + 4) = 20 \text{ m.}$$

Da bi se izračunalo koliko dekorativne trake treba za prostor u obliku raznostranog trougla, treba sabrati sve tri stranice, odnosno: $L = a + b + c$.

Trougaoni prostor ima perimetar: $L = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ m.}$

Na kraju, da bi se izračunala ukupna dekorativna traka koja treba Ajši, treba sabrati oba perimetra, odnosno: $20 \text{ m} + 12 \text{ m} = 32 \text{ m.}$

Ako Ajše ima traku dugu 30 m – da li će joj ostati trake ili će joj nedostajati?

**Zadatak 2**

Izračunaj perimetar trougla ako njegove stranice imaju dužine 5 cm, 7 cm i 10 cm.

Zadatak 3

Izračunaj perimetar pravougaonika sa dužinom stranice 8 cm i širinom 5 cm.

Zadatak 4

Precrtaj tabelu u svesku i popuni prazna polja!

Trougao	Formula za perimetar trougla

Zadatak 5

Precrtaj tabelu u svoju svesku i popuni je!

Četverougao	Formula za perimetar četverougla
pravougaonik 	
kvadrat 	
romb 	
paralelogram 	
trapezoid 	
deltoid 	

Zadatak 6

Njiva ima oblik jednakokrakog trapeza. Dvije jednake stranice (kraci) trapeza dugačke su 7 m, a baze imaju dužine 8 m i 12 m.

- Koliki je perimetar njive?
- Ako odlučiš smanjiti dužinu veće baze za 2 m, koliki će biti novi perimetar njive?
- Ako odlučiš smanjiti dužinu svakog kraka za 1 m, koliki će biti novi perimetar njive?

Primjer 3

Ti si dizajner i treba da izradiš ramove za slike pravougaonog oblika sa širinom y i dužinom $2y$. Neki od ramova sadrže ukrasne dijelove postavljene unutar pravougaonog rama. Ukrasni dijelovi imaju oblik jednakokrakog trougla sa osnovicom 8 cm i krakom x cm.

- Izrazi krak x trougla preko perimetra i osnovice.
- Ako znaš da je perimetar trougla 28 cm, kolika je dužina kraka x ?
- Perimetar pravougaonika izrazi kao funkciju od y .
- Ako je perimetar pravougaonika 60 cm, pronadi dužine stranica y i $2y$.

Rješenje:

- Perimetar trougla je $L = 8 + 2x$. Treba krak x izraziti preko osnovice i perimetra. Imamo $2x = L - 8$, $x = \frac{L-8}{2}$.
- Pod a) Izrazi krak x preko perimetra L i osnovice. Osnovica je poznata: 8 cm. Ako je i perimetar poznat, 28 cm zamjenom u $x = \frac{L-8}{2}$ imamo: $x = \frac{28-8}{2}$, $x = \frac{20}{2}$, $x = 10$. Krak trougla je 10 cm.
- Ako su stranice pravougaonika dužine $2y$ i širine y , tada je perimetar pravougla $L = 2y + 2 \cdot (2y) = 2y + 4y = 6y$
- Ako je perimetar pravougaonika 60 cm, tada zamjenom u $L = 6y$ imamo $60 = 6y$, $y = \frac{60}{6} = 10$. Stranice pravougaonika su: 10 cm i 20 cm.

Zadatak 7

Zamisli da uređuješ baštu i oko nje postavljaš stazu. Bašta je u obliku nepravilnog četverougla, gdje je jedna stranica duga a metara, druga stranica duga $2a$ metra, treća stranica duga b metara, a četvrta stranica duga $b + 3$ metra.

Bašta jednom stranom dodiruje mali cvjetnjak u obliku jednakostraničnog trougla, gdje je svaka stranica duga c metra.

- Izrazi perimetar bašte preko a i b .
- Izrazi perimetar cvjetnjaka preko c .
- Ako je ukupan perimetar bašte 50 metara i stranica a je za 4 metra kraća od b , pronadi vrijednosti a i b .
- Ako je perimetar cvjetnjaka 18 metara, kolika je dužina stranice c ?
- Kolika je ukupna dužina staze koju treba postaviti ako staza obilazi i baštu i cvjetnjak?

Ako imaš dva trougla sa istim perimetrom, da li oni uvijek imaju jednake dužine stranica? Objasni i navedi primjer

Odgovori na pitanja u svoju svesku. Potom podijeli odgovore sa svojim školskim drugom ili drugovima.

Pregledaj sva riješena zadatka iz ove lekcije.

1. Koji ti je zadatak bio najlakši?
2. Koji najteži?
3. Da li si se osjećao ili osjećala sigurno u računanju perimetra trougla i četverougla?
4. Šta si naučio ili naučila i kako možeš primijeniti ta znanja u stvarnom životu?
5. Koja znanja želiš da unaprijediš?

Samostalni rad

1. Parking-mjesto ima oblik pravougaonika. Dužina jedne strane je x metara, a širina je $2x$ metra. Kolika će biti ukupna dužina ograde oko parkinga? (Izrazi perimetar kao funkciju od x .)
2. U dvorištu vrtića nalazi se žardinjera u obliku jednakokrakog trougla. Dvije jednake strane duge su $2y$ metra, a osnovica je duga $3y$ metra. Izrazi perimetar žardinjere kao funkciju od y .
3. Dvorište ima oblik četverougla. Jedna strana je duga a metara, suprotna strana je duga $2a$ metra. Druge dvije strane su b i $b + 4$ metra. Izrazi perimetar dvorišta kao funkciju od a i b .
4. Trkačka staza ima oblik raznostraničnog trougla sa stranicama x , $x + 4$ metra i $2x$ metra. Izrazi perimetar staze kao funkciju od x .
5. Igralište je u obliku pravougaonika. Dužina je y metara, a širina $y - 5$ metara. Izrazi perimetar igrališta kao funkciju od y .
6. Bašta ima oblik jednakokrakog trougla. Dvije jednake strane duge su z metara, a osnovica je duga $1,5z + 4$ metra.
 - a) Izrazi perimetar bašte kao funkciju od z .
 - b) Koliki je perimetar bašte ako je $z = 7\frac{1}{4}$ m?
7. Kuća je okružena ogradom u obliku četverougla. Dužina jedne strane je x m, druga strana je $x + 3$ metra, a druge dvije strane su y i $y + 2$ metra.
 - a) Izrazi perimetar ograde kao funkciju od x i y .
 - b) Kolika je dužina ograde ako je x jednako 6 m i $y = 9$ m.

8. Igralište ima oblik petougla. Dužine stranica su $2a$ metra, $3a$ metra, a metar, $a + 2$ metra i $4a$ metra.
 - a) Izrazi perimetar igrališta kao funkciju od a .
 - b) Izračunaj perimetar igrališta ako je $a = 22,5$ m.
9. Paralelogram ima dužinu 10 m, a perimetar paralelograma je 36 m. Izračunaj drugu stranicu paralelograma.
10. Parking mjesto ima oblik jednakokrakog trapeza sa osnovama 15 m i 9 m, a perimetar je 42 m. Izračunaj dužinu kraka parkinga.
11. Na ulazu u park nalazi se dekoracija u obliku romba. Izračunaj dužinu stranice romba sa perimetrom 32 m.
12. Letjelica u obliku trapezoida ima stranice: 18 dm, 12 dm i 11 dm, i perimetar 58 dm. Izračunaj četvrtu stranicu letjelice.
13. Privjesak ima oblik deltoida sa stranicom 11 mm i perimetrom $3,2$ cm. Izračunaj drugu stranicu privjeska.
14. Jedan od uglova romba je 120° , a manja dijagonala je $8,5$ cm. Izračunaj perimetar romba.
15. Manja stranica jednog pravougaonika je 5 cm, a simetrala jednog njegovog ugla dijeli veću stranicu na dva odsječka od kojih je jedan dužine 4 cm. Izračunaj perimetar pravougaonika.
16. Dijagonala kvadrata je 12 cm. Kroz temena kvadrata povučene su prave paralelne sa dijagonalama. Odredi vrstu i perimetar dobijenog četverougla.
17. Kraci i manja osnova trapeza su po 8 cm. Veća osnova je $\frac{3}{8}$ od zbira druge tri stranice. Odredi perimetar trapeza.
18. Ugao između dvije jednake stranice deltoida je 60° , a dijagonala čije su krajnje tačke temena jednakih uglova je 5 cm. Izračunaj perimetar deltoida ako je jedna njegova stranica $7,5$ cm.

Površina složenih 2D-formi

U ovoj lekciji upoznaćeš se sa metodama za računanje površine složenih 2D-formi sastavljenih od kvadrata, pravougaonika i pravouglog trougla. Razgledavaćeš dijelove ovih formi, koristićeš formule i naučićeš kako da pojednostaviš proces računanja. Kroz ovu lekciju shvatićeš koliko je važno poznavanje mjernih jedinica i njihova primjena u svakodnevnom životu, na primjer pri računanju površine sobe, dvorišta ili druge površine.



Primjer 1

David želi da postavi pločice na pod u svojoj sobi. Soba ima pravougaoni oblik sa dužinom 4 m i širinom 3 m. Pločice koje će koristiti su u obliku kvadrata sa stranicom 30 cm.

- Kolika je površina sobe u kvadratnim metrima (m^2)?
- Kolika je površina sobe u kvadratnim centimetrima (cm^2)?
- Koliko pločica mu je potrebno da pokrije cijeli pod, bez da se uzme u obzir otpad od rezanja?

Rješenje:

Uputstvo za c): Broj potrebnih pločica = Površina sobe u cm^2 : Površina jedne pločice u cm^2 .

Odnosno: $120\,000\text{ cm}^2 : 900\text{ cm}^2 = 133,3$ pločice.

Da li su potrebne 133 ili 134 pločice? Na koji cijeli broj treba zaokružiti?

Primjer 2

Marija želi da postavi drveni okvir oko cvjetne bašte u obliku pravouglog trougla. Jedna kateta bašte je duga 4 m, a druga kateta je duga 3 m. Kolika je površina bašte u kvadratnim metrima (m^2)?

Rješenje:

Formula za površinu pravouglog trougla je:

$$\text{Površina} = \frac{\text{kateta}_1 \cdot \text{kateta}_2}{2}, \text{ odnosno } P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Zamjenom vrijednosti kateta u formulu dobijamo: $P = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\text{ m}^2$.

Znači, površina bašte je 6 m^2 .

Zadatak 1

Radni sto u obliku pravougaonika ima dužinu od 120 cm i širinu od 60 cm. Izračunaj površinu radnog stola.

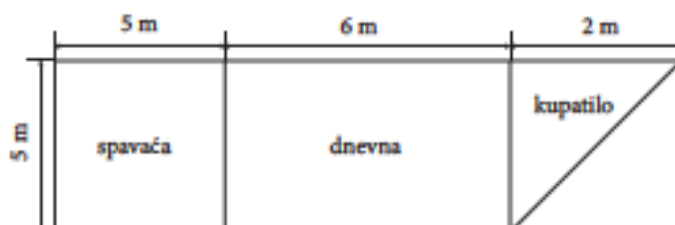
Zadatak 2

Kvadrat ima stranicu 15 cm.

- Kolika je površina kvadrata u kvadratnim decimetrima (dm^2).
- Kolika je dužina pravougaonika koji ima površinu jednaku površini kvadrata i širinu od 9 cm.

Primjer 3

Milica je kupila novi stan sa rasporedom kao na slici. Pod spavaće sobe ima oblik kvadrata, dnevna soba je u obliku pravougaonika, a kupatilo u obliku pravouglog trougla. Milica želi da postavi pločice na podove u svim prostorijama stana. Pomozi joj da napravi proračune.



- Kolika je ukupna površina stana?
- Ako Milica želi da pokrije polovinu stana parketom, kolika je površina koja treba da bude pokrivena parketom?

Rješenje:

- Površina cijelog stana je zbir površina svih prostorija, odnosno kvadrata, pravougaonika i pravouglog trougla.

Površina spavaće, koja ima oblik kvadrata, računa se po formuli $P = a^2$, pa zamjenom dobijamo: $P_k = a^2 = 5^2 = 25 \text{ m}^2$.

Površina dnevne računa se po formuli za površinu pravougaonika:

$$P_s = a \cdot b = 5 \cdot 6 = 30 \text{ m}^2.$$

Za površinu kupatila, iz uslova zadatka, jedna kateta je 2 m, a druga kateta je jednaka širini pravougaonika, odnosno 5 m.

Površina pravouglog trougla računa se po formuli $= \frac{\text{kateta}_1 \cdot \text{kateta}_2}{2}$ odnosno $P = \frac{a \cdot b}{2}$

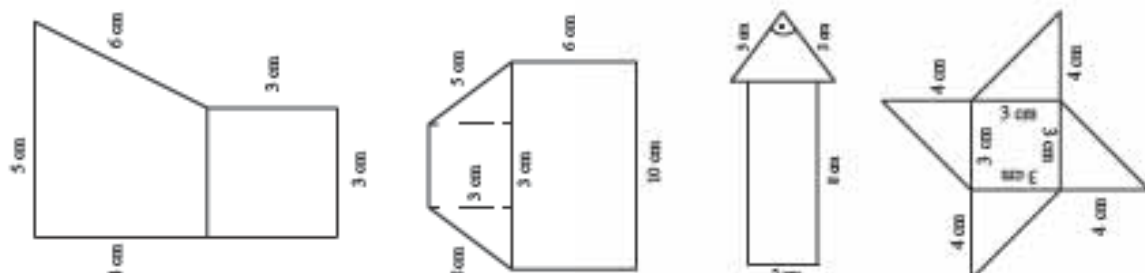
Zamjenom vrijednosti kateta, 2 m i 5 m dobijamo: $P_t = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5 \text{ m}^2$.

Ukupna površina stana je zbir površina kvadrata, pravougaonika i trougla: $P = P_k + P_s + P_t = 25 \text{ m}^2 + 30 \text{ m}^2 + 5 \text{ m}^2 = 60 \text{ m}^2$.

- Polovina ukupne površine je $\frac{1}{2}$ od 60 m^2 , odnosno 30 m^2 .

Zadatak 3

Izračunaj površinu svake složene 2D-forme.



Primjer 4

Sara želi napraviti dekorativni panel za zid od tri vrste drvenih ploča. Panel se sastoji od kvadrata, pravougaonika i pravouglog trougla. Dimenzije panela su sljedeće:

- Kvadrat ima stranicu 51 cm.
- Pravougaonik ima dužinu 80 cm, a širina mu je *dvije trećine* stranice kvadrata.
- Jedna kateta pravouglog trougla jednaka je širini pravougaonika, a druga kateta je 40 cm.

- Izrazi širinu pravougaonika preko stranice kvadrata i izračunaj njenu vrijednost.
- Kolika je ukupna površina panela u kvadratnim centimetrima (cm^2)?
- Pretvori ukupnu površinu panela u m^2 .
- Ako Sara želi premazati zaštitnim lakom samo kvadrat i pravougaonik, kolika je površina koju treba lakirati u dm^2 ?



Rješenje:

- Proračun širine pravougaonika preko stranice kvadrata:
Prema uslovu zadatka, širina pravougaonika je *dvije trećine* od stranice kvadrata, odnosno $\frac{2}{3} \cdot 51 \text{ cm} = 34 \text{ cm}$.
- Proračun površine kvadrata: $P_k = a^2 = (51 \text{ cm})^2 = 2601 \text{ cm}^2$.
Proračun površine pravougaonika: $P_p = 80 \text{ cm} \cdot 34 \text{ cm} = 2720 \text{ cm}^2$.
Proračun površine pravouglog trougla: $P_t = \frac{34 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm}}{2} = 680 \text{ cm}^2$.
Ukupna površina panela:
 $P = P_k + P_p + P_t = 2601 \text{ cm}^2 + 2720 \text{ cm}^2 + 680 \text{ cm}^2 = 6001 \text{ cm}^2$.
- Pretvaranje ukupne površine u m^2 :
Znaš da je $1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$, tada je $P = 6001 : 10000 = 0,6001 \text{ m}^2$.
- Površina za lakiranje je zbir površina kvadrata i pravougaonika, odnosno
 $P = 2601 \text{ cm}^2 + 2720 \text{ cm}^2 = 5321 \text{ cm}^2 = (5321 : 100) \text{ dm}^2 = 53,21 \text{ dm}^2$.

Zadatak 4

Na autoputu treba postaviti saobraćajni putni znak od pravougaone metalne ploče dimenzija 2 m i 1,2 m. Na ploči treba izrezati otvor u obliku pravouglog trougla s katetama 1,2 m i 0,8 m. Kolika je površina metala koja ostaje, izražena u cm^2 ?

Dvije različite složene 2D-forme sastavljene od kvadrata, pravougaonika i pravougljih trouglova imaju istu površinu. Da li to znači da te forme moraju imati isti obim (perimetar)? Objasni svoj odgovor primjerom.

Pokušaj da procijeniš svoje vještine u izračunavanju površine složenih 2D-formi. Koje su tvoje jake strane, a šta trebaš poboljšati?

Samostalni rad

1. U jednom skladištu treba odložiti kartonske kutije, pri čemu osnova svake kutije ima dimenzije 50 cm i 30 cm. Skladište ima podnu površinu 24 m^2 . Koliko kutija se može postaviti na pod?
2. Treba ofarbati dvije prostorije od kojih jedna ima pravougaone zidove sa stranicama 6 m i 2,5 m, a druga je u obliku kvadrata sa stranicom 6 m. Izračunaj ukupnu površinu za farbanje i izrazi je u cm^2 . Koliko litara boje će biti potrebno ako za 5 m^2 treba 1 litar boje?
3. Jedan park ima cvjetnu baštu u obliku kvadrata sa stranicama 12 m. Oko bašte se postavlja staza širine 2 m. Izračunaj ukupnu površinu bašte i staze i izrazi je u cm^2 .
4. Na jednoj trpezarijskoj stolu u obliku pravougaonika sa stranicama 1,8 m i 0,9 m postavlja se čaršaf u obliku jednakokrakog pravouglog trougla s katetom 15 cm.
 - a) Kolika je površina čaršafa, izražena u mm^2 ?
 - b) Koliko kvadratnih centimetara trpezarijskog stola će ostati nepokriveno?
5. Pod jedne sale je pravougaonik dimenzija 8,5 m i 6 m. Koliko pločica u obliku kvadrata sa stranicom 20 cm biće potrebno za pokrivanje 70% poda?
6. Jedan dizajner pravi ukrasna ogledala. Ona su u obliku kvadrata sa stranicom 80 cm, ali svako u uglu ima drveni ukras u obliku jednakokrakog pravouglog trougla s katetama po 20 cm. Kolika je površina dijela koji zauzima samo ogledalo (nepokriveni dio)?

7. Prozori jedne kuće sastoje se od kvadratnih ramova sa stranicom 1,5 m i pravougaonih staklenih otvora dimenzija 1,2 m i 0,8 m. Kolika je površina drvenog dijela jednog prozora i za 10 prozora?
8. U pravougaonoj prostoriji dimenzija 5 m i 4 m postavlja se tepih dimenzija 3 m i 2 m. Kolika površina prostorije ostaje nepokrivena? Izrazi je u dm^2 .
9. Jedan građevinar postavlja betonsku osnovu u obliku pravouglog trougla. Površina betonske osnove je 24 m^2 , a jedna kateta pravouglog trougla je 8 m. Kolika je druga kateta betonske osnove?
10. U jednoj bašti postoji pravougaoni cvjetnjak sa površinom od 15 m^2 i širinom od 3 m. Kolika je dužina cvjetnjaka?
11. Saobraćajni putni znak u obliku pravouglog trougla ima jednu katetu 1,2 m, a površina mu je $0,72 \text{ m}^2$. Kolika je druga kateta znaka?
- *12. Jedan dizajner pravi kvadratnu tablu sa površinom od $2,56 \text{ m}^2$. Kolika je dužina stranice table?
- *13. Jedna prostorija u obliku pravougaonika prekrivena je sa 36 m^2 laminata, a dužina jedne stranice je četiri puta veća od druge. Koliko metara lajsni treba kupiti da se postave uz ivice laminata, odnosno uz svaki zid prostorije?

Volumen i mjerne jedinice za volumen

U ovoj lekciji ćeš se upoznati s pojmom volumena, odnosno mjere za dio prostora koji zauzima neka 3D-forma. Naučićeš koje mjerne jedinice se koriste za volumen, njihove oznake i odnose među njima. Naučeno će ti pomoći da računaš volumen i da koristiš mjerne jedinice u svakodnevnom životu, kao i u matematičkim zadacima koje ćeš rješavati.

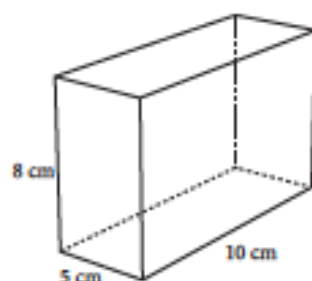


Primjer 1

Na crtežu je data kutija u obliku kvadra.

Odgovori na sljedeća pitanja:

- Kolika je dužina kutije?
- Kolika je širina kutije?
- Izračunaj površinu zida kutije koji ima dužinu 10 cm i širinu 5 cm.
- Koliko zidova ima kutija sa dužinom 10 cm i širinom 8 cm?
- Objasni zašto je kutija 3D-forma.



Rješenje:

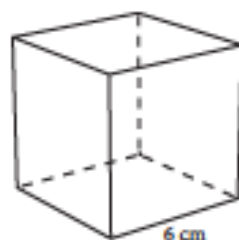
- Dužina kutije je 10 cm.
- Širina kutije je 5 cm.
- $P = 10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$.
- Kutija ima dva zida sa dužinom 10 cm i širinom 8 cm.
- Kutija ima tri dimenzije (10 cm, 5 cm, 8 cm), zato kažemo da je kutija 3D-forma (trodimenzionalna), odnosno ona zauzima dio prostora u kojem se nalazi.

Zadatak 1

Na crtežu je data kocka.

Odgovori na sljedeća pitanja:

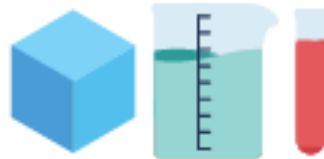
- Kolika je dužina svakog ruba kocke?
- Izračunaj površinu jednog zida kocke.
- Koji predmeti koje koristiš u svakodnevnom životu liče na kocku? Navedi bar dva primjera.



Svako čvrsto tijelo ima svoj oblik, veličinu i položaj.

Tečna i gasovita tijela nemaju stalni oblik.

Njihov oblik zavisi od posude u kojoj se nalaze.

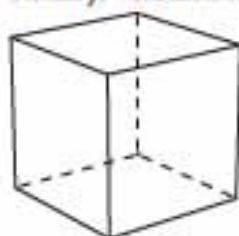


Dio prostora koji zauzima jedna 3D-forma zove se njen volumen.

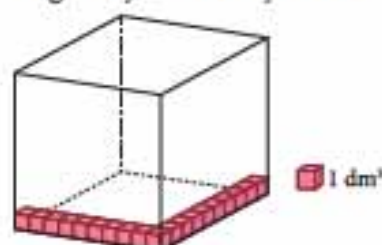
Primjer 2

Mjere za volumen izvedene su iz mjera za dužinu.

- a) Koliki je volumen kocke sa stranicom od jedan metar?



- b) Na crtežu je data prazna kocka sa volumenom 1 m^3 . Koliko kocki sa volumenom 1 dm^3 bi se moglo smjestiti u kutiju od 1 m^3 ?



Rješenje:

- a) Volumen kocke sa stranicom 1 m izražava se kao $1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}$, a to je 1 m^3 .
Zašto?

Volumen kocke sa stranicom od jedan metar (jedinična kocka) je osnovna jedinica mjere koja se naziva metar kubni i označava se sa 1 m^3 .

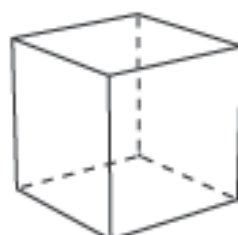
Odrediti volumen neke 3D-forme zapravo znači odrediti koliko jediničnih kocki sa stranicom od jedne jedinice dužine se nalazi u toj 3D-formi.

- b) Iz gore navedenog se vidi da se u jedan red kocke može smjestiti $10 \cdot 10 = 100$ kocki sa stranicom od 1 dm. Zašto?
Zato što je visina kocke 1 m, odnosno 10 dm, pa se po visini može složiti 10 redova sa po 100 kocki, ili $10 \cdot 100 = 1000$ kocki.
Možemo zaključiti da $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$.

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

Zadatak 2

- a) Na crtežu je data prazna kutija u obliku kocke sa ivicom od 1 dm.
Koliko ukupno manjih kutija u obliku kocki sa ivicom od 1 cm možeš smjestiti u kutiju sa ivicom od 1 dm?



Rješavanjem primjera 2 i zadatka 2 može se zaključiti da je svaka naredna mjera za volumen 1000 puta veća ili manja od prethodne, u zavisnosti od toga da li se krećemo prema većim ili manjim jedinicama.

Na primjer:

1 metar kubni (1 m^3) = 1000 decimetara kubnih (1000 dm^3)

1 decimetar kubni (1 dm^3) = 1000 centimetara kubnih (1000 cm^3)

1 centimetar kubni (1 cm^3) = 1000 milimetara kubnih (1000 mm^3)

Ovo znači da se uvijek kada se krećemo od veće prema sljedećoj manjoj mjernoj jedinici za volumen, mjerna vrijednost množi sa 1000, a kada se krećemo od manje prema sljedećoj većoj jedinici, dijelimo sa 1000.

Primjer 3

Data je kocka sa volumenom 3 dm^3 .

- Zapiši volumen kocke u cm^3 .
- Zapiši volumen kocke u m^3 .
- Uzmi posudu u obliku kocke sa volumenom 1 dm^3 i sipaj vodu. Koliko vode stane u posudu?

Rješenje:

$$\text{a) } 3 \text{ dm}^3 = (3 \cdot 1000) \text{ cm}^3 = 3000 \text{ cm}^3 \qquad 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$\text{b) } 3 \text{ dm}^3 = (3 : 1000) \text{ m}^3 = 0,003 \text{ m}^3 \qquad 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

$$\text{c) } \text{Ako u posudu u obliku kocke sa volumenom } 1 \text{ dm}^3$$

staviš vodu, a zatim tu vodu preliješ u mjerilo
(posudu za mjerenje tečnosti kao na slici),
pročitaeš da je u posudu stalo 1 litar vode.



$$1 \text{ litar} = 1 \text{ dm}^3$$

Kao što znaš od ranije, litar je jedinica za zapreminu (volumen) koja se koristi za mjerenje tečnosti i gasova.

$$\text{Ako } 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3, \text{ onda } 1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3.$$



Zadatak 3

U jedan rezervoar stavljeno je 6 dm^3 vode. Koliko litara vode ima u rezervoaru?

Zadatak 4

U fabrici za pakovanje vode jedan plastični sud sadrži 3 m^3 vode. Voda treba da se raspodijeli u manje plastične sudove, tako da svaki prima 5 litara. Koliko pakovanja od 5 litara će biti potrebno?

Uputstvo:

- Izračunaj koliko dm^3 ima u 3 m^3 .
- Izračunaj koliko litara vode ima u 3 m^3 .
- Izračunaj koliko pakovanja po 5 litara će biti potrebno da se raspodijeli cijela količina vode.

Zadatak 5

Novi akvarij za ribe u zoološkom vrtu ima oblik kvadra sa volumenom 1 m^3 .

- Izračunaj koliko litara vode će biti potrebno da se napuni akvarij.
- Koliko kontejnera kapaciteta 20 litara će biti potrebno da se napuni cijeli akvarij?

Kako možeš povezati jedinice za volumen (metre kubne, decimetre kubne, centimetre kubne i litre) sa primjerima iz svakodnevnog života? Koja je važnost ovih mjernih jedinica za različite situacije? Kako pretvaraš kubne metre u litre? Koje su druge veze i koja ti je od njih najlakša i zašto?

Odgovori na pitanja u tvojoj svesci. Ako je odgovor NE, vrati se na dio lekcije na koji se pitanje odnosi.

- Da li razumijem jedinice za volumen i njihove veze? Da / Ne
- Da li sam uspio da riješim zadatke u kojima se traži da koristim vezu između metara kubnih, decimetara kubnih, centimetara kubnih i litara? Da / Ne
- Kakve dodatne vježbe ili primjere bih volio da obradim da poboljšam svoje razumijevanje volumena i veze između jedinica za volumen? (Napiši kratak odgovor)

Samostalni rad

1. Pretvori $12,5 \text{ m}^3$ u decimetre kubne (dm^3).
2. Pretvori u litre (l) 5000 dm^3 .
3. Koliko centimetara kubnih (cm^3) je 2 dm^3 ?
4. Koliko metara kubnih (m^3) je 8000 l vode?
5. U jednoj bačvi je volumen 5 m^3 tečnosti. Koliko litara tečnosti ima u bačvi?
6. Pretvori $0,25 \text{ dm}^3$ u cm^3 .
7. Koliko metara kubnih (m^3) ima 3000 cm^3 pijeska?
8. Istraži mjesečnu potrošnju vode u tvojoj porodici. U kojoj mjernoj jedinici je izražena potrošena voda? Pretvori u druge mjerne jedinice (na primjer: litre, kilolitre, metre kubne).
9. Koji od datih volumena: 1 dm^3 , 10 cm^3 , 100 cm^3 , 1000 mm^3 je najveći?
10. Koji od datih volumena: 2 dm^3 , 300 cm^3 , 400 mm^3 , $0,4 \text{ m}^3$ je najmanji?
11. Može li se volumen od $6\,000\,000 \text{ cm}^3$ zapisati kao $0,6 \text{ m}^3$? Objasni svoj odgovor.
12. Koristi jedan od znakova: $>$, $<$, $=$ da uporediš parove brojnih vrijednosti za volumen.
 - a) $0,5 \text{ l}$ i $\frac{1}{2} \text{ dm}^3$
 - b) 340 cm^3 i 2 dm^3
 - c) 1500 cm^3 i 2 l
 - d) 820 dm^3 i $0,4 \text{ m}^3$.

Volumen kvadra i kocke

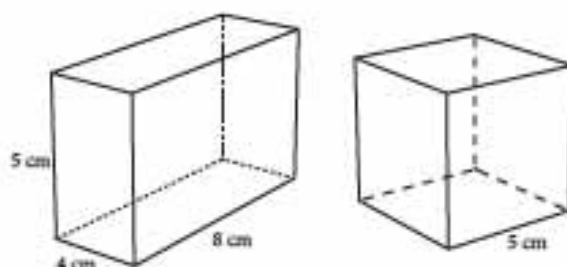
U svakodnevnom životu često se srećeš sa 3D-formama kao što su kocka i kvadar. One su prisutne u mnogim situacijama – od procjene prostora koji zauzima neka kutija do proračuna količine tečnosti koju može da primi rezervoar u obliku kvadra. Da bi uspješno izvodio ove proračune, važno je da razumiješ osnovne formule za volumen kocke i kvadra. Upravo će ti ova lekcija pomoći da savladaš ovu ključnu vještinu.



Primjer 1

Na školskom takmičenju za izradu poklona tvoj zadatak je da napraviš paketiće sa kolačima za drugare. Kolači treba da se stave u male kutijice koje imaju oblik kocke ili kvadra.

- Kako bi opisao oblike ovih kutija (šta je kocka, a šta kvadar)?
- Koliko zidova i koje 2D-forme imaju svaka od kutija?



Rješenje:

- Koristi crtež i objasni šta je kvadar, a šta kocka.
- Kvadar i kocka imaju 6 zidova. Sa crteža zapiši koje 2D-forme ima kvadar, a koje kocka.

Primjer 2

Tim za uređenje školskog kabineta želi da napravi drvene kutije za školski pribor, a svaka kutija da ima oblik kvadra ili kocke.

- Jedna drvena kutija ima oblik kvadra. Dužina kutije je 12 cm, širina 8 cm, a visina 5 cm.

Pitanja:

- Koliko malih kocki sa ivicom 1 cm stane u nju?
 - Izvedi formulu za volumen kvadra pomoću dužine, širine i visine.
- Druga drvena kutija ima oblik kocke sa ivicom od 6 cm. Izvedi formulu za volumen kocke.

Rješenje:

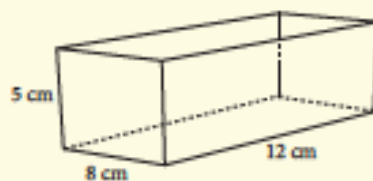
- Prva kutija za pribor ima oblik kvadra. Ako svaka mala kocka ima volumen od 1 cm^3 , broj kocki koje će stati u nju jednak je mjernom broju za volumen kvadra. Broj kocki koje mogu da se slože u osnovi kvadra po dužini i širini je $12 \cdot 8$, a pošto ima 5 takvih redova, dobija se ukupno $12 \cdot 8 \cdot 5 = 480$ kocki sa volumenom od 1 cm^3 . Tih 480 kocki popunjavaju kutiju u obliku kvadra, odnosno volumen kvadra je 480 cm^3 .

Znači: volumen kvadra = dužina · širina · visina.

Ako volumen, dužinu, širinu i visinu kvadra označimo sa V , a , b , c redom, tada je:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 12 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 480 \text{ cm}^3.$$

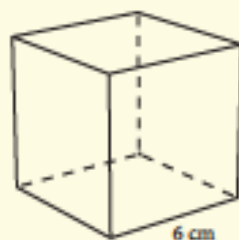


- b) Budući da je ovaj put kutija koju treba napraviti kocka, a kocka je kvadar sa jednakim dimenzijama ($a = b = c$), u formuli za volumen kvadra, kada širinu i visinu označimo sa a , isto kao i dužinu, dobijamo:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3.$$

Budući da je ivica kocke $a = 6$ cm, dobiva se: $V = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \text{ cm}^3$.

Znači, volumen kocke je 216 cm^3 . Kutija može da primi 216 kockica zapremine 1 cm^3 .



Zadatak 1

Bazen u obliku kvadra ima dimenzije 10 m, 5 m i 8 m. Koliko litara vode stane u bazen?

Zadatak 2

Vrati se na primjer 1 i odgovori na sljedeće pitanje: Koju kutiju ćeš izabrati ako treba da staviš kolače u kutiju koja može da primi više?

Primjer 3

Ana je kupila kutiju u obliku kvadra da upakuje poklon za svoju prijateljicu. Na kutiji je pisalo da je dužina 20 cm, širina 10 cm, a visina nije bila navedena. Ana je znala da je volumen kutije 2000 cm^3 .

- Kolika je visina kutije?
- Koliko malih kocki sa ivicom od 2 cm može da stane u ovu kutiju?

Rješenje:

- a) Volumen kutije se računa po formuli: $V = a \cdot b \cdot c$.

Ako u formulu uvrstiš poznate vrijednosti za dužinu i širinu kutije, dobiješ:

$$2000 = 20 \cdot 10 \cdot c \text{ dobit } \text{ćeš } 2000 = 200 \cdot c, \quad c = \frac{2000}{200} = 10. \text{ Znači, visina kutije je } 10 \text{ cm.}$$

- b) Volumen kocke je $V = a^3$. Ako za a uvrstiš 2 cm, dobija se: $V = (2 \text{ cm})^3 = 8 \text{ cm}^3$.

Znači, volumen jedne male kocke je 8 cm^3 .

Broj kocki sa ivicom od 2 cm koje stanu u veliku kutiju = volumen kutije : volumen jedne kocke = $2000 \text{ cm}^3 : 8 \text{ cm}^3 = 250$. Znači, kutija može da primi 250 malih kocki.

Zadatak 3

Knjižara ima ormare u obliku kvadra sa dužinom 1,5 m, širinom 50 cm i visinom 2 m. Vlasnik želi da zna:

- Koliki je volumen jednog ormara?
- Ako svaka knjiga zauzima prostor od 1500 cm^3 , koliko knjiga može stati u jedan ormar?

Ako imaš dvije kutije sa istim volumenom, da li one moraju imati iste dimenzije? Objasni. Ako udvostručimo dužinu stranice kocke, kako će se promijeniti njen volumen? Kako će na volumen uticati promjena visine kvadra, ako se dužina i širina ne mijenjaju?

Odgovori u svojoj svesci i podijeli odgovore sa jednim od svojih drugova u razredu.

1. Jesi li siguran/na u svoje razumijevanje formula za volumen kocke i kvadra?
2. Koji su ti zadaci bili lakši, a koji teži?
3. Gdje trebaš da se popraviš u odnosu na računanje volumena kvadra i kocke?
4. Razmisli o situacijama iz svakodnevnog života gdje možeš primijeniti volumen kvadra i kocke.

Samostalni rad

1. Izračunaj volumen kocke sa ivicom 15 cm.
2. Izračunaj volumen kvadra sa stranicama 12 dm, 15 dm i 18 dm.
3. Treba ti kutija u koju ćeš staviti sve svoje knjige. Kutija je u obliku kocke sa stranicom 30 cm. Koliko knjiga možeš staviti u ovu kutiju ako znamo da jedna knjiga zauzima 400 cm^3 ?
4. Rezervoar u obliku kvadra ima ivice dužine 4 m, 3 m i 2 m. Koliko litara vode može stati?
5. Toni želi da napravi kutiju za skladištenje alata u svojoj bašti. Kutija ima oblik kvadra, a dno kutije ima površinu od 4800 cm^2 . Izračunaj volumen kutije ako je širina kutije 40 cm, a visina 50 cm.
6. Magacin ima oblik kvadra sa dužinom 3 m, širinom 2,5 m i visinom 2 m.
 - a) Izračunaj volumen magacina.
 - b) Ako se u magacin trebaju smjestiti kutije u obliku kocke sa stranicom 50 cm, koliko kutija najviše može stati u magacin?
7. Kamion je natovaren ogrevnim drvetom. Koliko kubnih metara drva ima u kamionu ako su poređana u obliku kvadra sa dimenzijama 3 m, 4 m i 1,5 m?
8. * U dvorištu Jovana nalazi se rezervoar u obliku kocke koji se koristi za sakupljanje kišnice. On sakuplja 1728 litara vode.
 - a) Kolika je dužina stranice rezervoara?
 - b) Ako jedan dan padne kiše dovoljno da napuni rezervoar do pola, koliki volumen vode (u litrima) će sadržavati rezervoar?

Proračun površine kocke i kvadra pomoću njihovih mreža

U svakodnevnom životu često se susrećeš s predmetima u obliku kocke ili kvadra, kao što su kutije za poklone, namještaj i različita pakovanja. Da bi saznao koliko je materijala potrebno da se izradi takav predmet ili da ga prekriješ, na primjer platnom, treba da izračunaš njegovu ukupnu površinu.



U ovoj lekciji naučit ćeš kako da koristiš mreže kocke i kvadra za izračunavanje njihove površine. Razmotrit ćeš primjere iz stvarnog života i naučiti kako da primjenjuješ formule za ukupnu površinu u različitim kontekstima. Ovo znanje će ti pomoći da razumiješ i rješavaš praktične probleme vezane za dizajn, pakovanje i izradu.

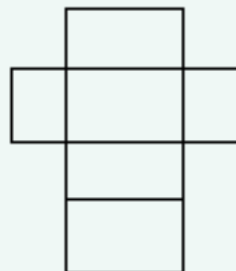
Primjer 1

Marija izrađuje modele kutijica za poklone. Ona koristi listove papira da napravi razvijenu mrežu kvadra. Jedna od kutija koju je napravila ima dužinu 8 cm, širinu 5 cm i visinu 4 cm. Marija razvija kutiju u mrežu i dobija 6 pravougaonika. Ona želi provjeriti da li je mreža tačna i da li može da sastavi kutiju.

- Koliko pravougaonika dimenzija 8 cm i 5 cm će sadržavati mreža?
- Koliko pravougaonika dimenzija 8 cm i 4 cm će sadržavati mreža?
- Koliko pravougaonika dimenzija 5 cm i 4 cm će sadržavati mreža?
- Provjeri da li su svi ovi pravougaonici dovoljni da se sastavi kutija (kvadar) i nacrtaj mrežu.

Rješenje:

- Ima 2 pravougaonika dimenzija 8 cm i 5 cm.
To su dva velika zida kvadra.
- Ima 2 pravougaonika dimenzija 8 cm i 4 cm.
To su dva duža i uža zida kvadra.
- Ima 2 pravougaonika dimenzija 5 cm i 4 cm.
To su dva manja zida kvadra.
- Mreža kvadra ima ukupno 6 pravougaonika.
Broj i dimenzije pravougaonika su tačni za sastavljanje kvadra.

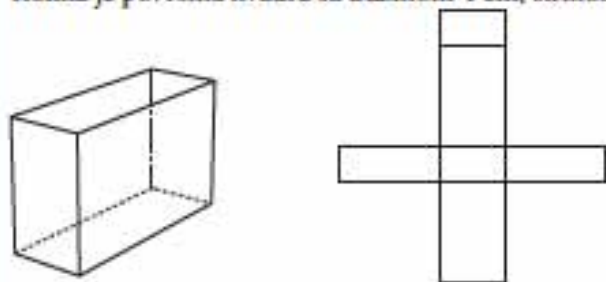


Zadatak 1

Pronađi i izmjeri dimenzije nekog predmeta u učionici koji ima oblik kocke (na primjer, kutija, knjiga, klupa...). Nacrtaj njegovu mrežu.

Primjer 2

Kolika je površina kvadra sa dužinom 4 cm, širinom 3 cm i visinom 2 cm?



Rješenje:

Imamo kvadar sa dužinom 4 cm, širinom 3 cm i visinom 2 cm. Površina svake stranice je:

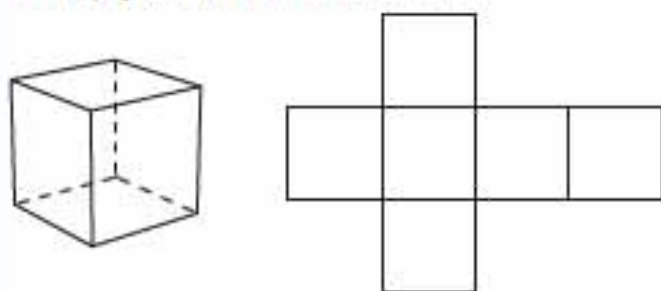
$$a \cdot b = 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2, a \cdot c = 4 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2, b \cdot c = 3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2.$$

Budući da svaka od ta tri pravougaonika postoji u po dva primjerka, ukupna površina je $2 \cdot (12 + 8 + 6) = 2 \cdot 26 = 52 \text{ cm}^2$.

Formula za površinu kvadra može se zapisati: $P = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Primjer 3

Kolika je površina kocke sa ivicom 3 cm?



Rješenje:

Iz mreže se vidi da kocka ima šest jednakih strana. Svaka strana je kvadrat sa stranicom 3 cm.

Površina svakog kvadrata je $3^2 = 9 \text{ cm}^2$. Ukupna površina kocke je $6 \cdot 9 = 54 \text{ cm}^2$. Zašto?

Formula za površinu kocke može se zapisati $P = 6a^2$

Zadatak 2

Nacrtaj mrežu kvadra sa dužinom 5 cm, širinom 3 cm i visinom 4 cm. Zatim, koristeći mrežu kvadra, izračunaj njegovu površinu.

Zadatak 3

Nacrtaj mrežu kocke sa ivicom 5 cm. Zatim, koristeći mrežu kocke, izračunaj njenu površinu.

Primjer 4

Martin želi da ofarba skladište u kojem čuva alat. Skladište je u obliku kvadra i ima dužinu 6 m, širinu 4 m i visinu 3 m.

- Kolika je ukupna površina svih zidova skladišta?
- Ako želi da ofarba samo tri zida, izračunaj njihovu ukupnu površinu.
- Kolika je ukupna površina poda i plafona zajedno?
Martin ima dodatnu ploču površine 12 m^2 . Može li se od ove ploče napraviti bočni zid skladišta? Ako da, izračunaj dimenzije takvog zida.

Rješenje:

- Proračun ukupne površine svih zidova:
 $P = 2 \cdot (6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 3) = 2 \cdot 54 = 108 \text{ m}^2$
- Proračun za farbanje tri zida:
Površina tri zida (na primjer, dva sa dimenzijama 6 m na 3 m i jedan sa dimenzijama 4 m na 3 m):
 $P = 18 \text{ m}^2 + 18 \text{ m}^2 + 12 \text{ m}^2 = 48 \text{ m}^2$.
- Proračun ukupne površine poda i plafona:
 $P = P_H + P_T = 6 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} + 6 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 48 \text{ m}^2$

Zadatak 4

David želi da ofarba sve zidove skladišta, ali ne i plafon i pod. Proizvođač boje navodi da 1 litar boje može da pokrije 5 m^2 . (Koristi dimenzije skladišta iz primjera 4)

- Koliko litara boje će mu biti potrebno da ofarba sve zidove skladišta?
- Ako svaka kanta sadrži po 10 litara boje, koliko kanti boje će trebati da kupi David?

Ako udvostručimo dužinu ivice kocke, šta će se desiti sa njenom površinom? Kako ti može pomoći mreža kvadra da brže izračunaš njegovu površinu?

Ocijeni svoje znanje o površini kvadra i kocke. Ponovo se vrati na dijelove lekcije za koje nisi siguran/na u svoje znanje.

Ocjena 5 – Mogu samostalno da identifikujem stranice, da napravim mrežu i tačno da izračunam ukupnu površinu kvadra i kocke.

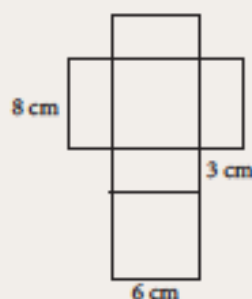
Ocjena 3–4 – Ponekad mi treba pomoć da nacrtam mrežu kvadra i kocke i da uradim tačne proračune površine.

Ocjena 1–2 – Imam poteškoće u povezivanju podataka i primjeni formula. Potrebna mi je dodatna pomoć i vježba da potpuno razumijem i primijenim koncepte.

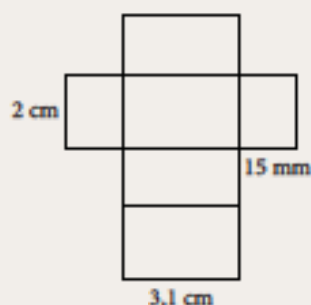
Samostalni rad

1. Izračunaj površinu kvadra ili kocke iz datih mreža

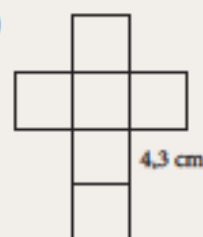
a)



b)



c)



2. Ukupna površina kocke je 150 cm^2 . Kolika je ivica kocke?
3. Data je mreža kocke. Znamo da jedna strana kocke ima površinu 64 cm^2 . Izračunaj ukupnu površinu kocke.
4. Osnova kvadra je pravougaonik čija je površina 120 cm^2 . Širina osnove je 6 cm, a visina kvadra je 10 cm. Izračunaj površinu kvadra.
5. Osnova kvadra je kvadrat sa stranicom 8 cm. Visina kvadra je 1 cm. Izračunaj ukupnu površinu kvadra.

6. Površina jedne strane kocke iznosi 36 cm^2 . Izračunaj ivicu kocke i ukupnu površinu kocke.
7. Površina osnove kvadra je 54 cm^2 , a širina osnove je 9 cm .
 - a) Izračunaj dužinu osnove.
 - b) Ako je visina kvadra 10 cm , izračunaj njegovu površinu.
8. Data je kocka čija jedna strana ima površinu 81 cm^2 . Izračunaj ivicu i ukupnu površinu kocke.
9. Kvadra ima: osnovu površine 50 cm^2 , prednji zid površine 70 cm^2 i visinu 7 cm . Kolika je ukupna površina kvadra?
10. Površina jednog bočnog zida kvadra je 60 cm^2 . Znamo da je visina kvadra 8 cm , a osnova kvadra kvadrat. Izračunaj stranicu osnove i ukupnu površinu kvadra.
11. Dejanova soba je kvadar čiji bočni zidovi imaju površine $7,5 \text{ m}^2$ i $10,5 \text{ m}^2$.
 - a) Kolika je površina poda ako je ukupna površina sobe 56 m^2 ?
 - b) Ako mu je za jedan kvadratni metar poda potrebno po 10 pločica, koliko pločica mu treba za cijeli pod?
 - c) Za jedan kvadratni metar mu je potrebno po $0,5 \text{ l}$ boje. Koliko litara boje mu treba za plafon?
12. Porodica Petrovski je kupila otvoren akvarij u obliku kocke za svoje ribe. Na oznaci piše da je ukupna površina akvarija 720 cm^2 . Odredi dužinu ivice kocke i izračunaj koliko litara vode može stati u akvarij.
13. Emilija želi da napravi kutiju u obliku kocke za poklon. Ona koristi karton i želi da stranica kutije bude takva da ukupna površina kutije bude 600 cm^2 . Odredi dužinu ivice kocke i izračunaj volumen kutije.

TEMA 5

RAD SA PODACIMA



U svakodnevnom životu stalno smo okruženi podacima: koliko učenika ima u školi, koliko vremena provodimo u učenju, koliko sunčanih dana je bilo ovog mjeseca, rezultati sportskog takmičenja, koliko puta smo posjetili biblioteku. Kada prikupljamo, uređujemo i prikazujemo ove informacije, zapravo radimo sa podacima.

Rad sa podacima nije samo matematika – to je moćna vještina koja će ti pomoći da razmišljaš logično, da donosiš odluke i da drugima objasniš svoje ideje.

„Matematika je kraljica nauka, a statistika je njezina sluškinja“.

Rezultati učenja

Nakon izučavanja ove teme bit ćeš sposoban/sposobna da:

- biraš način prikupljanja, organiziranja i predstavljanja diskretnih podataka, po potrebi i grupiranih u jednake intervale.
- tumačiš podatke predstavljene dijagramima i donosiš zaključke prema modi ili modalnoj klasi za grupirane podatke, medijani i rangu.
- koristiš jezik vjerovatnoće da opišeš i tumačiš događaj.

Planiranje istraživanja

U svakodnevnom životu često se suočavaš sa situacijama gdje ti je potrebno da doneseš zaključke na osnovu podataka. Na primjer, kada planiramo porodični izlet, treba da prikupimo informacije o vremenu, popularnim destinacijama, smještaju, kao i mišljenja članova porodice. Slično tome, u nauci i radu planiranje istraživanja je osnova za dobijanje tačnih i korisnih rezultata. Ovom lekcijom ćeš naučiti kako da napraviš plan za istraživanje, da izradiš i koristiš instrumente za prikupljanje podataka, kao što su ankete, upitnici i mjerenja.



Primjer 1

Učenici u tvom odjeljenju žele saznati koje voće najviše vole učenici iz škole. Isplaniraj istraživanje i odgovori na sljedeća pitanja:

- Koji način prikupljanja podataka ćeš koristiti: anketu, intervju, posmatranje i sl.? Objasni zašto si izabrao/la taj način prikupljanja podataka.
- Sastavi 3 pitanja za anketu ili neki drugi instrument.
- Prikupi podatke od 10 učenika iz svog odjeljenja i prikaži podatke u tabeli.

Rješenje:

- Možeš koristiti anketu jer je to brz i efikasan način prikupljanja mišljenja od većeg broja učenika.
Anketa je jednostavna za dizajniranje, a odgovori se mogu analizirati i vizualizirati pomoću tabele ili dijagrama.
- Pitanja za anketu:
 - Koje je tvoje omiljeno voće?
A) Jabuka B) Banana C) Narandža D) Drugo _____
 - Koliko često jedeš voće?
A) Svaki dan
B) Nekoliko puta sedmično
C) Jednom sedmično
D) Rijetko
 - Da li bi želio/la da u školskoj kantini ima više voća?
A) Da B) Ne

c) Odgovori po pitanjima od 10 učenika

Tabela - omiljeno voće učenika

Učenik	Pitanja		
	Omiljeno voće	Koliko često jede voće?	Da li bi želio više voća u bifeu?
1.	Jabuka	Svaki dan	Da
2.	Banana	Nekoliko puta sedmično	Da
3.	Narandža	Svaki dan	Ne
4.	Drugo (grožđe)	Nekoliko puta sedmično	Da
5.	Banana	Svaki dan	Ne
6.	Jabuka	Jednom sedmično	Da
7.	Jabuka	Svaki dan	Ne
8.	Narandža	Rijetko	Da
9.	Banana	Svaki dan	Ne
10.	Drugo (kivi)	Jednom sedmično	Da

Izaberi dijagram i prikaži podatke o omiljenom voću i o tome koje voće se najviše konzumira.

Zadatak 1

Otkrij koja je omiljena aktivnost tvojih školskih drugova za vrijeme odmora.

- Kako bi započeo/la istraživanje?
- Koji podaci su ti potrebni?
- Kako bi prikupio/la podatke?

Istraživanje je proces postavljanja pitanja, prikupljanja podataka, njihove analize i donošenja zaključaka o određenom problemu ili temi. To je način otkrivanja novih informacija ili rješavanja određenih problema kroz organiziran rad.

Istraživanje ti pomaže da naučiš nešto novo, bolje da razumiješ ljude i situacije oko sebe i da donosiš odluke na osnovu informacija.

Primjer 2

Tvoja škola razmišlja da organizira novu vannastavnu aktivnost, ali želi saznati šta bi bilo najzanimljivije za učenike. Tebi je povjeren zadatak da napraviš istraživanje kako bi otkrio/la koju aktivnost učenici najviše žele. Tvoj zadatak je da napraviš plan istraživanja, izradiš instrument za prikupljanje podataka i prikupiš informacije od učenika.

Rješenje:

Da bi napravio/la plan istraživanja, slijedi korake i bilježi ih u svoju svesku o tome šta želiš da istražuješ.

Koraci za istraživanje:

1. Identifikacija problema ili pitanja:

- Prvo, treba da odlučiš šta tačno želiš da saznaš ili istražiš. Primjer: „Koja su najčešća hobija učenika u našoj školi?“

2. Planiranje istraživanja:

- Razmisli o načinu na koji ćeš prikupiti podatke (anketa, intervju, posmatranje).
- Odluči koje alate ćeš koristiti (upitnik, anketa, tabela).
- Odredi koga ćeš uključiti u istraživanje (npr. učenike iz tvog odjeljenja).

3. Prikupljanje podataka:

- U ovom koraku možeš sprovesti anketu ili intervju, posmatrati situacije ili prikupljati informacije iz knjiga i interneta. Primjer: Napravi anketu s pitanjima poput: „Koje je tvoje omiljeno hobi?“ ili „Koliko vremena sedmično posvećuješ hobiju?“

4. Selekcija i organizacija podataka:

- Podatke raspoređuj u tabele, dijagrame ili spiskove kako bi ih lakše analizirao/la. U ovom primjeru prikaži koliko učenika je izabralo svako hobi u dijagramu.

5. Analiza podataka:

- Razmisli šta ti pokazuju prikupljeni podaci.
- Uporedi različite odgovore i pokušaj povezati informacije.

Primjer: Ukoliko je 60% učenika izabralo sport kao hobi, to može značiti da je sport najpopularnije hobi.

6. Donošenje zaključaka:

- Napiši šta si naučio/la iz istraživanja.
- Odgovori na pitanje koje si postavio/la na početku.

Primjer: „Najčešće hobi među učenicima je sport, a zatim slijede muzika i umjetnost.“

7. Prezentiranje rezultata:

- Napravi izvještaj ili prezentaciju kako bi podijelio/la rezultate s drugima.

Primjer: Koristi tabele, dijagrame i kratak tekst da objasniš rezultate.



Identifikacija
problema



Planiranje
istraživanja



Prikupljanje
podataka



Organizacija
podataka



Analiza
podataka



Donošenje
zaključaka

Zadatak 2

Problem za istraživanje: Kako različiti faktori životne sredine utiču na rast biljaka?

U sedmom razredu učiš o životnoj sredini, ekosistemima i faktorima koji utiču na žive organizme. Tvoje istraživanje neka se fokusira na to kako faktori poput svjetlosti, vode, temperature i tla utiču na rast biljaka. Napravi plan istraživanja.

Za istraživanje koje si napravio/la razmisli i odgovori na pitanja: Da li je cilj istraživanja bio jasno definisan? Koliko je bio efikasan odabrani metod prikupljanja podataka? Šta bi uradio/la drugačije sljedeći put?

Ocijeni se prema sljedećim kriterijima:

- Jasno definisan plan (1–5).
- Kreativnost u izboru instrumenta (1–5).
- Primjenjivost rezultata istraživanja (1–5).

Samostalni rad

Izaberi predmet i problem za koji ćeš napraviti istraživanje.

1. Biologija

- Kako različiti tipovi tla utiču na rast biljaka?
- Koja vrsta hrane daje najviše energije tokom sportskih aktivnosti?
- Kako zagađenje utiče na kvalitet vode u lokalnim rijekama?

2. Hemija

- Koji napitak izaziva najveću promjenu pH-vrijednosti zuba?
- Kako različite vrste rastvarača utiču na rastvorljivost šećera?
- Da li su domaća sredstva za čišćenje jednako efikasna kao i komercijalna?

3. Fizika

- Da li različiti materijali od kojih su napravljene posude utiču na toplotnu izolaciju vode u njima?
- Kako podloga utiče na brzinu kretanja tijela po njoj?
- Koja vrsta papira stvara najbolji avion za najduži let?

4. Geografija

- Kako klimatske promjene utiču na godišnja doba u tvom regionu?
- Kako različiti tipovi reljefa utiču na temperature u obližnjim mjestima?
- Koji su najčešći prirodni resursi u tvojoj okolini i kako se koriste?

5. Historija

- Kako se razlikuju životni uslovi u različitim epohama (npr. srednji vijek i moderno doba)?
- Kako je razvoj tehnologije uticao na komunikaciju u prošlosti?
- Koji historijski događaji su imali najveći uticaj na lokalnu zajednicu?

6. Tehničko obrazovanje

- Koji od materijala – drvo, plastika ili papir – je najpreporučeni za obradu u nastavnom predmetu tehničko obrazovanje?
- Kako se solarni paneli mogu koristiti za smanjenje potrošnje električne energije?
- Koje su prednosti i nedostaci različitih vrsta obnovljivih izvora energije?

7. Matematika

- Kako se razlikuje prosječna dnevna temperatura tokom jednog mjeseca u različitim regionima?
- Koji matematički koncepti su najzastupljeniji u svakodnevnom životu?
- Kako se koriste geometrijski oblici u arhitekturi lokalnih zgrada?

8. Informatika

- Kako se može povećati sigurnost učenika na internetu?
- Da li različiti tipovi datoteka (JPEG, PNG) mijenjaju kvalitet slika?
- Kako se softveri za obradu podataka mogu koristiti za analizu anketa?

Prikupljanje i organizacija podataka za istraživanje

Da li si se nekada pokušao/la napraviti tabelu s imenima i omiljenim aktivnostima svojih drugara? Prikupljanje podataka je prvi korak ka dobijanju informacija koje možeš analizirati i iz njih izvući zaključke. U ovoj lekciji podsjetit ćeš se kako da prikupljaš i organizuješ podatke na način koji je ključni korak u istraživačkom procesu.



Primjer 1

Učenici šestog razreda napravili su anketu da saznaju koliko sati dnevno njihovi školski drugovi provode gledajući televiziju. Podaci koje su prikupili su sljedeći (izmjereno u satima):

1, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 2, 1, 3, 4.

Pomogni im da organizuju podatke u tabelu frekvencije.

Rješenje:

Korak 1: Grupisanje podataka

Prvo, identifikujemo sve različite vrijednosti u podacima (1, 2, 3, 4 sata).

Korak 2: Brojanje frekvencija

Broji se koliko puta se pojavljuje svaka vrijednost u podacima:

1 sat: 4 puta; 2 sata: 6 puta; 3 sata: 6 puta i 4 sata: 4 puta.

Ili se podaci mogu ovako sabrati: 1 sat: ////; 2 sata: ####; 3 sata: ####; 4 sata: ////

Korak 3: Popunjavanje tabele

Tabela frekvencije će izgledati ovako:

Provedeni sati gledanja TV

Broj sati (h)	Frekvencija (f)
1	4
2	6
3	6
4	4

Korak 4: Analiza tabele

- Najveći broj učenika (6) gleda televiziju 2 ili 3 sata dnevno.
- Najmanji broj učenika (4) gleda televiziju 1 ili 4 sata dnevno.

Zadatak 1

Učenici jedne škole bili su anketirani o mjestu gdje se hrane dok su u školi.

- a) Dopuni tabelu u svojoj svesci.
b) Na koji način se učenici najviše hrane?
c) Napravi druga poređenja.

Mjesto gdje se hrane učenici

Način ishrane	Znak	Broj učenika
Učenička kuhinja	### ### ### ### #	
Bliska sendvičarnica	### ### ### ### /	
Hrana od kuće	### ### ### ///	
Ne hrane se	### ### †	
Ukupno		

Primjer 2

U školskoj biblioteci, učenici su željeli saznati koliko knjiga njihovi školski drugovi pročitaju za jedan mjesec. Prikupili su podatke od 30 učenika i dobili sljedeće brojeve pročitanih knjiga: 7, 3, 5, 4, 2, 6, 8, 7, 3, 5, 5, 10, 2, 4, 6, 7, 1, 8, 4, 5, 3, 6, 7, 9, 6, 3, 2, 6, 5, 4.

Prilikom prikupljanja ovih vrijednosti, napravljeno je prebrojavanje pročitanih knjiga. Za ovakve podatke kažemo da su diskretni podaci. Diskretni podaci su podaci koji mogu primiti samo određene brojne vrijednosti (npr. broj knjiga, traktora, klupa).

- a) Grupiraj podatke u intervale od po 2 knjige (na primjer, 1–2, 3–4, 5–6 itd.).
Podsjeti se: Šta je interval?
- b) Napravi tabelu frekvencije koja prikazuje intervale i koliko učenika pripada svakom intervalu.
- c) Analiziraj tabelu i odgovori: U kojem intervalu ima najviše učenika? U kojem intervalu ima najmanje učenika?

Rješenje:

Korak 1: Grupisanje podataka u intervale

Dobijene vrijednosti organizujemo u grupe od po 2 knjige: 1–2 knjige; 3–4 knjige; 5–6 knjiga; 7–8 knjiga i 9–10 knjiga. Šta je rang?

Zašto je korisno grupisati podatke u intervale?

- Da bismo izbjegli nepregledne tabele s mnogo redova za svaku pojedinačnu vrijednost, možemo grupisati podatke u intervale.
- Kod velikog broja podataka, grupisanje pojednostavljuje i organizuje informacije radi lakše analize.
- Sa intervalima možemo lakše analizirati koji interval vrijednosti je najčešći (ima najveću frekvenciju) i kako su raspoređeni podaci.

Korak 2: Brojanje frekvencija u svakom intervalu

1–2: 4 učenika; 3–4: 8 učenika; 5–6: 10 učenika; 7–8: 6 učenika i 9–10: 2 učenika

Korak 3: Tabela frekvencije

Broj pročitanih knjiga za 1 mjesec

Interval (broj knjiga)	Frekvencija (broj učenika)
1 - 2	4
3 - 4	8
5 - 6	10
7 - 8	6
9 - 10	2
Ukupno	30

Korak 4: Analiza tabele

Najviše učenika (10) pripada intervalu 5–6 knjiga, što znači da je najveći dio učenika pročitao 5 ili 6 knjiga.

Najmanje učenika (2) pripada intervalu 9–10 knjiga.

Grupisanje podataka uvijek se radi u intervale jednake dužine.

Zadatak 2

Učenici istražuju koliko vremena njihovi školski drugovi iz razreda troše na putovanje do škole.

Oni su sprovedi anketu i dobili sljedeće odgovore (u minutama):

2, 23, 14, 18, 36, 21, 3, 7, 10, 15, 26, 24, 3, 16, 28, 9, 14, 32, 10, 22, 17, 5, 11, 6, 15, 8, 9, 17, 20, 16, 7, 30.

- Grupiraj podatke u intervale dužine po 10 minuta i kreiraj tabelu frekvencije za broj učenika u svakom intervalu.
- Koristeći tabelu, odgovori: Koji vremenski interval je najčešći (u kojem najviše učenika putuje)? Koji vremenski interval je najrjeđe zastupljen?
- Razmisli i predloži dva razloga zašto učenici putuju različito vrijeme do škole.

Kako je grupisanje podataka u intervale pomoglo da se izvuku važne informacije o podacima?

Razmisli da li postoji drugi način prikupljanja podataka osim brojanjem?

Navedite primjere podataka koji se mogu dobiti mjerenjem pomoću nekog mjernog instrumenta.

Odgovori na pitanja u svojoj svesci i podijeli ih sa jednim drugom iz razreda.

- Da li sam pravilno organizovao/la podatke i grupisao/la ih u odgovarajuće intervale?
 - Da, napravio/la sam tabelu tačno i grupisao/la podatke u odgovarajuće intervale.
 - Počeo/la sam da pravim tabelu, ali nisam odabrao/la najodgovarajuće intervale.
 - Nisam uspio/la da napravim tačnu tabelu frekvencije.
- Da li razumijem proces izbora intervala i kako oni utiču na analizu podataka?
 - Da, razumijem zašto je važno da odaberem pravilne intervale za podatke i kako oni utiču na rezultate.
 - Pokušao/la sam da odaberem intervale, ali sam imao/la poteškoće da odredim najbolju, najoptimalniju dužinu intervala.
 - Nisam razumio/la zašto i kako da grupišem podatke u intervale.
- Da li mogu da analiziram tabelu i izvučem značajne informacije iz podataka?
 - Da, mogu da analiziram tabelu i izvučem korisne informacije (kao što su najčešći intervali, raspodjela podataka).
 - Mogu da analiziram podatke, ali ne uvijek na tačan način.
 - Ne mogu da izvučem značajne informacije iz tabele.

Samostalni rad

- Na jednoj svinjarskoj farmi izvršeno je mjerenje 120 svinja i pri tome su dobijene sljedeće vrijednosti u kg:

86	90	90	92	90	93	90	91	91	86	86	86	86	87	87
92	93	90	87	90	88	90	93	87	88	93	90	91	88	89
93	88	86	90	89	88	89	91	88	85	91	92	92	90	90
93	91	85	92	85	85	91	92	89	87	89	92	90	87	90
92	85	92	91	86	90	86	93	87	91	87	85	87	89	87
85	90	89	88	90	87	88	86	88	91	91	93	86	87	91
88	90	88	90	91	93	89	91	89	90	87	91	92	92	91
84	85	92	84	86	88	93	90	89	87	84	92	90	87	92

- Grupiraj podatke u intervale dužine 5 kilograma i kreiraj tabelu frekvencije za broj svinja u svakom intervalu.
- Koristeći tabelu, odgovori: Koji interval ima najviše svinja i koliki dio predstavlja od ukupnog broja svinja? Koji interval ima najmanje svinja i koliki dio predstavlja od ukupnog broja svinja?
- Donesi druge zaključke.

2. Data je visina 52 učenika u cm:

153	145	156	154	153	157	155	145	146	153	158	146	158
148	151	159	157	146	154	159	147	153	154	157	146	148
147	159	159	152	148	153	159	155	148	148	158	148	157
151	147	154	153	146	152	148	157	153	146	155	146	153

- Grupiraj podatke.
 - U kojem intervalu ima najviše učenika, a u kojem najmanje?
 - Broj učenika u svakom intervalu zapiši u procentima
3. Podatke iz datog dijagrama frekvencije prikaži pomoću tabele frekvencije za grupisane podatke.



4. Dati su podaci o starosti ljudi u autobusu gradskog prevoza.

2	11	21	79	32	42	63	51	59	43
55	63	13	50	22	57	25	29	32	58
38	45	51	67	16	61	43	57	60	51
8	55	37	59	35	56	59	33	28	30
40	53	49	74	18	48	19	26	78	62

- Prikaži ih pomoću tabele frekvencije za grupisane podatke.
- Koristeći tabelu, odgovori: Koja starosna grupa je najzastupljenija u gradskom prevozu, a koja najmanje?
- Prema tvom mišljenju, šta bi mogao biti razlog da ta starosna grupa bude najzastupljenija u gradskom prevozu?

Stubičasti i kružni dijagram

Dijagrami su važan alat za predstavljanje prikupljenih podataka jer omogućavaju veću preglednost i jasnoću. Pri crtanju dijagrama koriste se linije, geometrijski oblici, slike i drugi elementi da prikazemo podatke na razumljiv način. Cilj koji treba postići svakim dijagramom jeste da on bude jednostavan i jasan za sve koji su zainteresirani za problem koji je istraživani.

U ovoj lekciji naučit ćeš kako da predstavljaš podatke na jednostavan i vizuelno privlačan način pomoću kružnog dijagrama, a zatim da ih analiziraš i koristiš prema zahtjevima.



Primjer 1

Stubičastim dijagramom je prikazano kako je jedna porodica rasporedila zaradu u mjesecu novembru 2024. godine.

- Prema stubičastom dijagramu, na šta je porodica najviše, a na šta najmanje potrošila u novembru 2024. godine?
- Može li se zaključiti da je porodica uštedjela u mjesecu novembru 2024. godine? Objasni svoj odgovor.



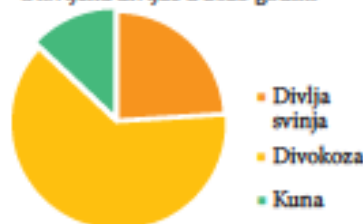
Rješenje:

- Prema stubičastom dijagramu, porodica je u mjesecu novembru 2024. godine najviše potrošila na hranu, a najmanje na zabavu.
- Prema dijagramu, ukupni troškovi su $51 + 11 + 28 + 6 = 96\%$, što znači da je porodica u mjesecu novembru 2024. godine uštedjela 4 % svoje ukupne zarade.

Zadatak 1

- Koja divljač je najviše ulovljena u 2023. godini?
- Napravi i druga poređenja.
- Koje druge vrste divljači postoje u RS Makedoniji?

Ulovljena divljač u 2023 godini



Primjer 2

U jednom odjeljenju sedmog razreda ima 36 učenika, od kojih je 17 djevojčica, a 19 dječaka. Prikaži podatke kružnim dijagramom.

Rješenje:

Prema podacima, u primjeru postoje dvije kategorije: dječaci i djevojčice. Dakle, kružni dijagram će biti podijeljen na dva dijela (sektora). Da bi se odredila veličina svakog dijela, najprije određuješ veličinu ugla kojim se predstavlja jedan učenik. Puni ugao kruga od 360° dijeli se s ukupnim brojem učenika ($19 + 17 = 36$), za koje se priprema kružni dijagram, da bismo odredili koliki centralni ugao odgovara za 1 učenika, odnosno $360^\circ : 36 = 10^\circ$.

Dijelovi u kružnom dijagramu imat će sljedeće uglove:

- Za djevojčice $17 \cdot 10^\circ = 170^\circ$.
- Za dječake $19 \cdot 10^\circ = 190^\circ$.

Dobijene centralne uglove crtamo u krugu s proizvoljnim radijusom, upisujemo naslov dijagrama i legendu koja pokazuje kako su označeni predstavljeni podaci.

Sastav razreda



Primjer 3

U tabeli 1 je dato kako su raspoređeni novci od lutrije. Prikaži podatke kružnim dijagramom.

Tabela 1: Raspodjela novca od lutrije

	%
Država	40
Nagrade	35
Komisije	10
Drugo	15

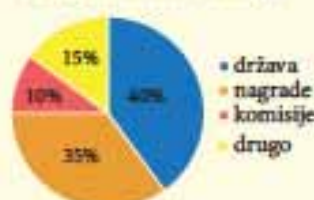
Rješenje:

1. Da bismo nacrtali kružni dijagram kada su podaci dati u procentima, najprije treba da odredimo koliki centralni ugao odgovara datim procentima (vidi tabelu 1).
Na primjer: $40\% \text{ od } 360^\circ = 0,4 \cdot 360^\circ = 144^\circ$.
2. Zatim uz pomoć šestara crtamo svaki ugao u kružnici koji odgovara svakoj od kategorija (država, nagrade, komisije i drugo).
Na kraju označavamo dijelove kruga (pravimo legendu) i upisujemo naslov (ime) dijagrama.

Tabela 2: Izračunavanje ugla za svaku kategoriju

	%	ugao
Država	40	$0,40 \cdot 360^\circ = 144^\circ$
Nagrade	35	$0,35 \cdot 360^\circ = 126^\circ$
Komisije	10	$0,10 \cdot 360^\circ = 36^\circ$
Drugo	15	$0,15 \cdot 360^\circ = 54^\circ$

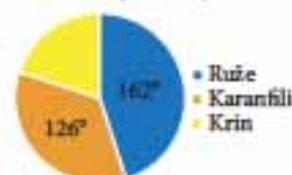
Raspodjela novca od lutrije



Primjer 4

Kružnim dijagramom je data prodaja 3 vrste cvijeća u cvjećari „Anemona“. Ako je poznato da je prodano ukupno 720 komada cvijeća, prikaži podatke tabelom.

Prodano cvijeće u cvjećarnici



Rješenje:

Prvo određujemo veličinu ugla koji odgovara dijelu prodatih krinova. Budući da cijela kružnica ima 360° , imamo $360^\circ - 162^\circ - 126^\circ = 72^\circ$. Određujemo koliki centralni ugao odgovara 1 komadu cvijeća. Ukupnom broju od 720 cvjetova odgovara ugao od 360° . Znači, za svaki komad cvijeća odgovara ugao $360^\circ : 720 = 0,5^\circ$. Da bismo odredili koliko je broj cvjetova od svake vrste, odgovarajući ugao dijelimo s uglom za 1 komad: broj prodatih ruža $162^\circ : 0,5^\circ = 324$, broj prodatih karanfila $126^\circ : 0,5^\circ = 252$, broj prodatih krinova $72^\circ : 0,5^\circ = 144$. Tabela će izgledati ovako:

Tabela 3: Prodato cvijeće u cvjećari „Anemona“

Cvijeće	Ugao	Broj cvjetova
Ruža	162°	324
Karanfil	126°	252
Krin	72°	144

Postoje i drugi načini da se izračunaju vrijednosti za popunjavanje tabele. Pokušaj objasniti sljedeći: $162^\circ : 360^\circ = 0,45 = 45\%$; 45 % od 720 je 324.

Zadatak 2

Urednici jedne lokalne televizije žele da znaju koliki je interes za različite emisije u programu. U tabeli 2 dati su podaci iz istraživanja.

- Precrtaj tabelu u svoju svesku.
- Prikaži podatke kružnim dijagramom.

Tabela 4: Vremenska zastupljenost emisija u programu jedne TV

	%	ugao
Reklame	25	
Vijesti	15	
Muzika	20	
Sport	10	
Filmovi	30	

Zadatak 3

Povodom patronskog praznika škole, učenici su učestvovali u različitim sportskim aktivnostima. Rezultati učešća su prikazani u sledećoj tabeli:

Učešće u školskim sportskim aktivnostima

Sportska aktivnost	Broj učenika
Fudbal	35
Košarka	20
Trčanje	25
Rukomet	15
Drugo	25

Prikaži podatke iz tabele kružnim dijagramom, gdje ćeš pored svakog sektora upisati odgovarajući procenat učenika koji su učestvovali u određenoj sportskoj aktivnosti.

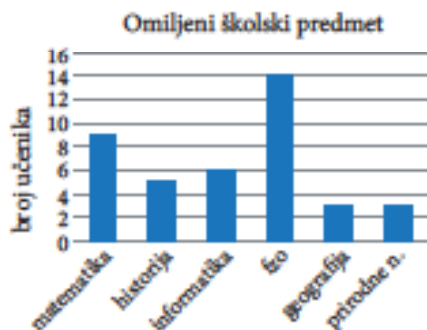
Uputstvo:

1. Izračunaj ukupan broj učenika koji su učestvovali u sportskim aktivnostima.
2. Izračunaj procenat učenika koji su učestvovali u svakoj od navedenih aktivnosti.
3. Nacrtaj kružni dijagram, pri čemu će svaki ugao u dijagramu imati veličinu koja odgovara procentu učenika koji su učestvovali u odgovarajućoj aktivnosti.

Zadatak 4

U jednom odjeljenju učenici su popunili anketu o svojim omiljenim predmetima. Podaci iz ankete prikazani su datim stubičastim dijagramom.

Prikaži podatke iz stubičastog dijagrama kružnim dijagramom, gdje ćeš pored svakog sektora prikazati i procenat učenika koji su izabrali određeni predmet kao omiljeni.



Razmisli o tome kako izbor dijagrama (stubičasti ili kružni) može uticati na način na koji ljudi mogu razumjeti podatke. Koji tip dijagrama bi izabrao/la da prikažeš podatke koji pokazuju dijelove cjeline i zašto?

Odgovori na pitanja u svoju svesku.

1. Mogu li prikazati podatke odgovarajućim tipom dijagrama (stubičasti ili kružni)?
2. Da li obraćam pažnju na tačnost proračuna i jasnoću prikaza?
3. U čemu bih mogao/la da se poboljšam pri sljedećem pokušaju predstavljanja podataka dijagramom?

Zatim, ako nisi u nečemu siguran/a, pregledaj lekciju i koriguj tvoja znanja i vještine.

Samostalni rad

1. Organizacija koja se bavi istraživanjima u vezi sa životnom sredinom došla je do podataka koji su zapisani u datoj tabeli. Tvoj zadatak je da odgovoriš na sljedeće zahtjeve:

- Precrtaj tabelu u svoju svesku i dopuni je.
- Za koji proizvod se koristi najviše posjećenih stabala?
- Koliki dio od ukupno posjećenih stabala se koristi za sve proizvode?
- Prikaži podatke kružnim dijagramom, prikazujući odgovarajuće % za svaki sektor.

Za šta se koriste posjećena stabla?	Potrošeni dio posjećenih stabala	%
Ogrjevno drvo	$\frac{1}{4}$	
Papir	$\frac{1}{5}$	
Namještaj	$\frac{3}{10}$	
Ostalo		

2. a) Informiši se kolika je redovna cijena opreme za izlet u prodavnicama u tvom mjestu stanovanja i unesi ih u tabelu.

Proizvodi	Redovna cijena	Snizena cijena
Ležaljka		
Sto		
Stolica		
Suncobran		

- Ako postoji sniženje redovne cijene za $\frac{1}{3}$, odredi sniženu cijenu za svaki proizvod i popuni tabelu.
 - Podatke o redovnoj cijeni i podatke o sniženoj cijeni prikaži stubičastim dijagramom.
 - Koliko denara ti je potrebno da kupiš sve proizvode po njihovoj redovnoj cijeni, a koliko po sniženoj cijeni?
3. U tabeli 3 je dato kako je Maja rasporedila svoja sredstva u mjesecu maju 2024. godine. Prikaži podatke kružnim dijagramom.

Tabela 3: Raspodjela Majinih sredstava za mjesec 2024

Raspodjela novca	Denari	%	Ugao
Kirija	6000		
Prevoz	2000		
Hrana	12000		
Ostalo	3000		
Ušteda	1000		

4. Anabela je brojala koliko je knjiga pročitao svaki član njene porodice u jednom mjesecu:

- Otac: 5 knjiga
- Majka: 8 knjiga
- Brat: 3 knjige
- Sestra: 4 knjige

Nacrtaj stubičasti dijagram koji će prikazati ove podatke.

5. Vladimir je anketirao 40 učenika iz škole o njihovom omiljenom sportu i dobio:

- Fudbal: 16 učenika
- Košarka: 10 učenika
- Odbojka: 8 učenika
- Plivanje: 6 učenika

a) Prikaži podatke u tabeli.

b) Prikaži ove podatke kružnim dijagramom.

6. Sljedeći stubičasti dijagram prikazuje koliko su glasova dobile četiri pjesme na školskom takmičenju za najbolju pjesmu. Prikaži podatke kružnim dijagramom.



7. U jednoj školi sprovedena je anketa o omiljenim ukusima sladoleda kod 120 učenika. Dobijeni podaci prikazani su kružnim dijagramom.

a) Prikaži podatke u tabeli.

b) Nacrtaj stubičasti dijagram koji će prikazati ove podatke.



Crtanje i tumačenje linijskog dijagrama i piktograma

Dva jednostavna i efektivna načina za vizuelno predstavljanje podataka jesu linijski dijagram i piktogram. Linijski dijagram u šestom razredu koristio/la si za prikazivanje promjena podataka tokom vremena. Povezivanjem tačaka koje predstavljaju podatke mogao/la si pratiti trend i zaključiti da li se neka vrijednost povećava, smanjuje ili ostaje ista. U ovoj lekciji upoznat ćeš se s dijagramom piktogram i naučiti kako crtati i tumačiti ova dva tipa dijagrama kroz primjere iz svakodnevnog života.



Primjer 1

Porodica Petrovski putovala je iz grada A prema gradu B, koji su bili na udaljenosti od 100 km. Na crtežu 1 dato je rastojanje koje su prešli u određeno vrijeme. Nađi:

- rastojanje pređeno u prvom satu
- rastojanje pređeno u drugom satu
- ukupno pređeno rastojanje
- ukupno vrijeme potrošeno za odmor

Uputstvo: e) Ukupno vrijeme potrošeno za odmor je dva puta po 30 minuta, i to jednom nakon jednog sata od polaska i još jednom nakon drugog sata. Dakle, porodica Petrovski odmarala je ukupno 1 sat.



Primjer 2

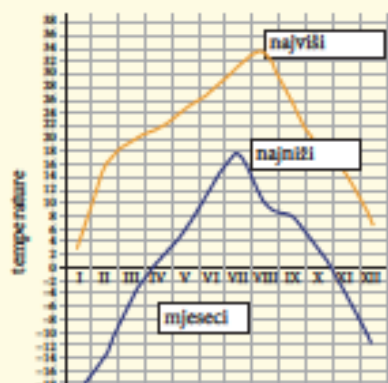
Grafički prikaži podatke o najvišoj i najnižoj prosječnoj mjesečnoj temperaturi u jednom gradu, date u tabeli 1.

Tabela 1 – Najviša i najniža temperatura po mjesecima

mjesec	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Najviša zabilježena temperature (°C)	5	18	22	24	27	30	34	36	28	21	17	9
Najniža zabilježena temperature (°C)	-18	-12	-3	3	8	15	20	12	10	5	-2	-10

Rješenje:

Da bi se ovi podaci grafički prikazali i da bi se uočile razlike između najviše i najniže temperature, nije dovoljan samo prvi kvadrant koordinatnog sistema. Zato su dijagrami nacrtani u prvom i četvrtom kvadrantu. Na ovaj način grafički prikaz omogućava da se uoči i razlika između najviše i najniže prosječne temperature u datom gradu (crtež 2).



crt. 2

Primjer 3

Promjene vremena tokom jedne sedmice bilježene su i prikazane piktogramom, a izmjerene temperature u tabeli.

Piktogram za vrijeme po danima u jednoj sedmici

Ponedjeljak	Utorak	Srijeda	Četvrtak	Petak	Subota	Nedjelja
☉	☉	☁	☁	☁	☉	☉

Tabela – Temperatura po danima u jednoj sedmici

Dan	Temperatura (°C)
Ponedjeljak	28
Utorak	30
Srijeda	25
Četvrtak	22
Petak	24
Subota	29
Nedjelja	31

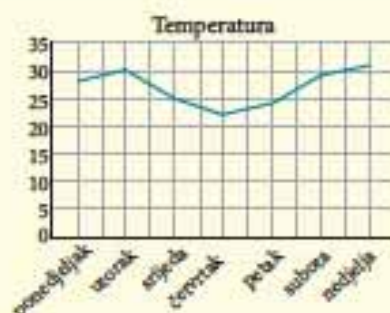
Piktogram je dijagram koji koristi simbole ili slike za predstavljanje podataka, pri čemu svaki simbol ima određenu numeričku vrijednost. Ova vrsta dijagrama posebno je korisna za vizuelno poređenje.

- Prema piktogramu, koji dan je bio najoblačniji?
- Koji dan je izmjerena najniža temperatura?
- Koji dan je bio najtopliji?
- Da li je uvijek kada ima sunca temperatura ista? Objasni.

- e) Prema podacima, nacrtaj linijski dijagram koji će prikazati temperature tokom sedmice.
- f) Kako se mijenjala temperatura tokom sedmice? Možeš li prepoznati trend (da li je temperatura rasla, opadala ili se mijenjala)?

Rješenje:

- a) Najoblačniji dan je četvrtak jer ima simbol ☁ za kišovito vrijeme.
- b) Najniža temperatura je 22°C , izmjerena u četvrtak.
- c) Najtopliji dan je nedjelja, s temperaturom od 31°C .
- d) Ne, iako u toplijim danima ima sunca (utorak, subota, nedjelja), iz piktograma se primjećuje da i u ponedjeljak takođe ima sunca, ali je temperatura niža nego u drugim danima. Ovo pokazuje da osim sunca, na temperaturu mogu uticati i drugi faktori kao što su vjetar ili vlažnost zraka.
- e) Linijski dijagram za temperaturu dat je na crtežu.
- f) Temperatura je u utorak porasla u odnosu na ponedjeljak. U srijedu i četvrtak značajno je opala. Od petka do nedjelje ponovo je rasla, dostižući najvišu vrijednost u nedjelju (31°C). Vidimo da temperature nisu stalne, već se mijenjaju tokom sedmice.



Zadatak 1

Jedan supermarket prati prodaju različitih vrsta voća tokom jedne sedmice.

Podaci o broju prodatih kilograma prikazani su piktogramom, gdje svaki od simbola: 🍎, 🍌, 🍌 odgovara 5 kg voća.

Piktogram prodaje:

Ponedjeljak	Utorak	Srijeda	Četvrtak	Petak	Subota	Nedjelja
🍌 🍌 🍌	🍌 🍌	🍌 🍌 🍌	🍌 🍌 🍌	🍌 🍌 🍌 🍌	🍌 🍌 🍌 🍌	🍌 🍌 🍌 🍌 🍌

- a) Prikaži podatke u tabeli.
- b) Kojeg dana je prodato najviše kilograma voća?
- c) Kojeg dana je bila najmanja prodaja voća?
- d) Koja vrsta voća se najviše prodavala tokom sedmice?
- e) Prema podacima, nacrtaj linijski dijagram koji će prikazati ukupnu prodaju voća tokom sedmice.
- f) Da li ima dana s istom ukupnom prodajom voća? Koji su to dani?
- g) Kako se mijenjala prodaja voća tokom sedmice? Možeš li prepoznati neki trend (da li je prodaja rasla, opadala ili varirala)?

Primjer 4

Učenici jedne škole odlučili su da istraže koliko vremena dnevno provode u različitim aktivnostima tokom jedne sedmice. Oni su koristili piktogram da prikažu prikupljene podatke.

Piktogram:  = 1 sat

Aktivnost	Pon.	Uto.	Sri.	Čet.	Pet.	Sub.	Ned.
Učenje 	  	 	  	 	 		
Gledanje TV 	 	 		 	  	   	  
Sport  	 	 	 		  	  	 
Igranje igara 	 	  		 	 	  	   

- Koja aktivnost je najzastupljenija tokom sedmice?
- Koja aktivnost ima najmanje sati tokom sedmice?
- Kojeg dana je učenik proveo najviše vremena pred ekranom (gledanje TV i igranje igrica)?
- Kojih dana je učenik proveo isti broj sati u učenju?
- Nacrtaj piktogram za ukupan broj sati provedenih u svakoj aktivnosti tokom sedmice, ako  = 2 sata.
- Analiziraj: Da li je vrijeme provedeno u učenju i sportu dovoljno u poređenju s vremenom pred ekranom? Šta bi se moglo promijeniti?
- Predloži novi sedmični raspored u kojem bi sve aktivnosti bile bolje izbalansirane.

Rješenje:

Prvo izračunavamo ukupan broj sati za svaku aktivnost tokom sedmice:

Aktivnost	Pon.	Uto.	Sri.	Čet.	Pet	Sub	Ned	Ukupno
Učenje 	3	2	3	2	2	1	1	14 s.
Gledanje TV 	2	2	1	2	3	4	3	17 s.
Sport  	2	2	2	1	3	3	2	15 s.
Igranje igara 	2	3	1	2	2	3	4	17 s.

- Gledanje TV  (17 h) i igranje igrica  (17 h) su dvije najzastupljenije aktivnosti.
- Učenje  (14 h) je aktivnost kojoj je posvećeno najmanje vremena.
- U subotu (7 h) i nedjelju (7 h).
- U ponedjeljak i srijeda (po 3 h), utorak, četvrtak i petak (po 2 h), subotu i nedjelju (po 1 h).

- e) Piktogram za ukupan broj sati tokom sedmice:

Legenda  = 2 sata

Učenje :      

Gledanje TV :         

Sport  :       

Igranje igrica :        

- f) Vrijeme provedeno pred ekranom (34 h) mnogo je veće od vremena za učenje (14 h) i sport (15 h). Za bolji balans, moguće je smanjiti vrijeme za TV i igrice i dodati više aktivnosti na otvorenom ili vrijeme za učenje.

- g) Na primjer:

Smanjenje gledanja TV  na 10–12 sati sedmično.

Smanjenje igranja igrica  na 10–12 sati sedmično.

Povećanje učenja  na 16–18 sati.

Povećanje sporta   na 18 sati za bolje zdravlje i aktivan život.

Treba da znaš kako rasporediti svoje vrijeme da bi imao/la bolji balans između učenja, rekreacije i slobodnih aktivnosti. Ova analiza kroz piktogram pomaže ti da razumiješ važnost vremena i njegovog upravljanja.

Zadatak 2

Jedan prodavač na pijaci prodaje različite vrste voća i vodi evidenciju o broju prodatih kilograma svaki dan tokom jedne sedmice. Podaci su prikazani u sljedećoj tabeli:

Dan	Jabuke (kg)	Banane (kg)	Narandže (kg)	Grožde (kg)
Ponedjeljak	10	8	4	8
Utorak	12	10	7	6
Srijeda	9	7	6	8
Četvrtak	16	12	8	9
Petak	14	10	6	10
Subota	21	20	16	13
Nedjelja	18	15	12	10

- Koja vrsta voća se najviše prodavala tokom sedmice?
- Kojeg dana je bila najveća ukupna prodaja voća?
- Napravi piktogram u kojem ćeš za ukupno prodano voće po danima koristiti simbol  koji predstavlja 10 kilograma.
- Koji bi problem imao/la kada bi trebao/la napraviti piktogram u kojem svaki simbol     predstavlja 10 kilograma?
- Koja vrsta voća se prodavala najmanje tokom sedmice?
- Podatke prikaži kružnim dijagramom (za svaku vrstu voća po danima ili za ukupno voće po danima).
- Šta možeš zaključiti o potrošačkim navikama ljudi? Kojeg dana ima najviše kupaca i zašto?

Zašto su piktogrami korisni za prikazivanje podataka u odnosu na druge tipove dijagrama? U kojim situacijama bi bilo bolje koristiti linijski dijagram umjesto piktograma?

Precrtaj tabelu u svoju svesku i popuni je.

Vještina	Potpuno savladano ☒	Djelimično savladano 	Potrebna mi je pomoć 
Crtam i tumačim piktogram			
Crtam i tumačim linijski dijagrame			
Upoređujem različite tipove dijagrama			
Primjenjujem dijagrame u realnim situacijama			

Kratko pismeno razmišljanje:

- Napiši jednu stvar koju si naučio/la o piktogramima i linijskim dijagramima, a koja će ti biti korisna u svakodnevnom životu.
- Koji dio lekcije ti je bio najlakši, a koji ti je bio najizazovniji?

Samostalni rad

- Jedna prodavnica bicikala vodi evidenciju o broju prodatih bicikala tokom šest mjeseci. Podaci su prikazani u sljedećoj tabeli:

Mjesec	Januar	Februar	Mart	April	Maj	Juni
Bicikli	12	18	25	30	50	60

- Nacrtaj linijski dijagram koji prikazuje ove podatke.
 - Analiziraj podatke i objasni kakav trend se primjećuje.
 - U kojem mjesecu je bio najveći rast prodaje? Šta misliš, koji faktori bi mogli izazvati ovaj rast?
 - Ako se trend nastavi, predviđi koliko bicikala bi moglo biti prodano u julu.
- Zamisl(i) da trebaš da stvoriš sistem za praćenje fizičke aktivnosti učenika u svojoj školi. Prikupljat ćeš podatke o broju koraka koje prave svaki dan i prikazati ih piktogramom.
 - Predloži simbole za piktogram (na primjer,  za 1000 koraka).
 - Osmisli način na koji će učenici moći bilježiti svoje korake i kako će se to pretvoriti u grafički prikaz.

- c) Napravi primjer piktograma za podatke iz jedne sedmice za jednog učenika.
- d) Razmisli kako bi ovaj sistem mogao motivirati učenike da budu aktivniji i predloži poboljšanja.
3. Razmotri sljedeću situaciju: jedna grupa učenika želi prikazati podatke o omiljenim sportovima svojih školskih drugova. Neki od njih odlučuju da naprave piktogram, drugi biraju stubičasti dijagram, a treći kružni dijagram.
- a) Ocijeni koji tip dijagrama je najpogodniji za ovu situaciju i zašto.
- b) Ako treba da prezentiraš podatke na školskoj priredbi pred većim brojem ljudi, koji dijagram bi izabrao/la i zašto?
- c) Da li postoje situacije u kojima piktogram ne bi bio najbolji izbor? Objasni zašto.
- d) Napravi kritičku analizu dobrih i slabih strana svakog tipa dijagrama u odnosu na čitljivost, tačnost i razumljivost podataka. Možeš koristiti tabelu da zapišeš prednosti i nedostatke za svaki dijagram.
4. Marija trenira atletiku i vodi evidenciju o vremenu (u sekundama) koje joj je potrebno da istrči 100 metara tokom jedne sedmice. Njeni rezultati su zapisani u tabeli:

Dan	Ponedjeljak	Utorak	Srijeda	Četvrtak	Petak	Subota	Nedjelja
Vrijeme (sekunde)	18,5	18,3	18,0	17,8	17,5	17,4	17,2

- a) Prikaži podatke linijskim dijagramom.
- b) Kojeg dana je Marija imala najbolje vrijeme?
- c) Da li se njeno vrijeme poboljšava tokom sedmice? Objasni.
- d) Između koja dva uzastopna dana postoji najveće poboljšanje u vremenu?
- e) Kakav trend možemo primijetiti iz ovog dijagrama?
- f) Ako Marija nastavi trenirati istim tempom, šta možemo očekivati za njeno vrijeme u narednim danima?

Modalna klasa i dijagram frekvencije za grupisane podatke

U ovoj lekciji naučit ćeš kako da pronadeš važne informacije, kao što su moda, medijana i rang, kada su podaci grupisani. Grupisani podaci su oni koji su sređeni u grupe ili intervale da bi bili jasniji i lakši za analizu. U ovoj lekciji naučit ćeš kako iz takvih podataka da izvučeš značajne informacije koje možeš primijeniti u svakodnevnim situacijama. Na primjer, zamisli da si organizator školskog događaja i treba da odrediš najčešću veličinu cipela učenika za narudžbu odgovarajuće opreme. Osim toga, potrebno je da znaš srednju veličinu i kakav je opseg veličina da bi isplanirao narudžbe.



Primjer 1

Učenici jednog odjeljenja žele da otkriju koja je najčešća visina u odjeljenju, kao i da nađu srednju vrijednost za visinu. Oni su prikupili podatke o visini (u cm) svih učenika u odjeljenju:

Prikupljeni podaci o visini (u cm):

150, 155, 160, 165, 160, 170, 175, 160, 165, 155, 160.

Rješenje:

Moda (najčešća vrijednost): 160 cm.

Rang (opseg podataka): $175 - 150 = 25$ cm.

Nakon sređivanja podataka po veličini: 150, 155, 155, 160, 160, 160, 160, 165, 165, 170, 175, vrijednost koja se nalazi u sredini (šesta visina) je 160 cm, pa je medijana 160 cm.

Dodatna aktivnost: Prikupite podatke za neku drugu karakteristiku (npr. veličina cipela) i sami izračunajte ove vrijednosti.

Zadatak 1

Ana je mjerila koliko vremena njene drugarice provode gledajući televiziju radnim danima poslijepodne (u minutama). Dobila je sljedeće podatke: 30, 45, 60, 45, 30, 60, 45.

- Koji broj minuta je najčešći (koja je moda)?
- Koja je medijana?
- Koliki je rang podataka?

Primjer 2

Učenici jednog odjeljenja željeli su da saznaju koliko im obično treba vremena da stignu do škole. U tu svrhu sproveli su anketu i zabilježili vremena (u minutama) koja su im bila potrebna za putovanje:

Prikupljeni podaci (u minutama):

6	10	12	15	18	20	20	20	22	25
30	23	11	27	24	29	16	28	25	11
14	16	27	6	13	24	19	7	17	22

- Prikaži podatke u tabeli s grupisanim podacima.
- Odredi modalnu klasu.
- Odredi klasu koja sadrži medijanu.

Rješenje:

- Grupiramo podatke u intervale dužine od 4 minute i prikazujemo ih u tabeli.

Vrijeme (minuti)	Broj učenika
6 – 10	4
11 – 15	6
16 – 20	8
21 – 25	7
26 – 30	5

Modalna klasa je interval s najvećom frekvencijom u grupisanim podacima.

- Modalna klasa je interval 16 – 20 minuta, jer ima najviše učenika (8 učenika).
- Klasa koja sadrži medijanu je interval koji sadrži vrijednost koja je u sredini ako se podaci poredaju po veličini. U skupu od 30 podataka to će biti 15-ti ili 16-ti podatak, koji se u ovom slučaju nalazi ponovo u klasi 16 – 20 minuta.

Modalna klasa se koristi kada su podaci grupisani, a ne kao moda, koja je konkretna vrijednost u negrupisanim podacima. Ako dvije ili više klasa imaju istu najveću frekvenciju, tada podaci imaju dvije (ili više) modalne klase.

Primjer 3

Učenici iz bibliotečke sekcije sproveli su istraživanje o broju pročitanih knjiga iz školske biblioteke tokom prvog polugodišta. Oni su anketirali svoje školske drugove i dobili sljedeće rezultate:

0, 1, 2, 0, 3, 2, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 2, 5, 3, 2, 2, 4, 6, 3, 3, 1, 4, 0, 3, 7, 2, 3, 5, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 5, 4, 2, 3, 5.

- Izradi tabelu s grupisanim podacima.
- Nacrtaj dijagram frekvencije za grupisane podatke.
- Protumači rezultate:
 - Koji interval ima najveću frekvenciju, odnosno u kojem intervalu najviše učenika čita knjige?
 - Šta nam govori najčešća grupa o čitanju knjiga kod učenika?
 - Da li rezultati ukazuju na dobru naviku čitanja ili, ipak, postoji prostor za podsticanje čitanja? Objasni svoje razmišljanje.
- Analiza posebnih slučajeva:
 - Da li postoji neka iznenađujuća informacija u raspodjeli podataka?
Na primjer, da li ima neočekivano mali broj učenika koji čitaju mnogo knjiga ili neočekivano veliki broj učenika koji čitaju mali broj knjiga ili uopšte ne čitaju?
 - Koji je tvoj prijedlog za aktivnosti ili mjere kojima bi se poboljšale navike čitanja, na osnovu analize ovih podataka?

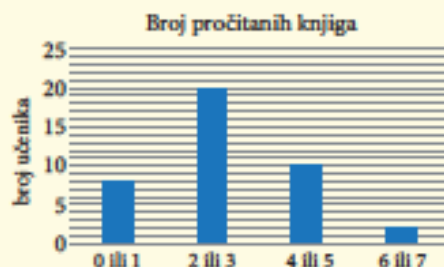
Rješenje:

a)

Broj pročitanih knjiga	Broj učenika (frekvencija)
0 – 1	8
2 – 3	20
4 – 5	10
6 – 7	2

- b) Crtanje stubičastog dijagrama za grupisane podatke veoma je slično kao i za negrupisane, ali sada svaki stub odgovara jednom intervalu (klasi) iz tabele frekvencije za grupisane podatke. Svi stubovi imaju istu širinu, a visina zavisi od frekvencije odgovarajuće grupe (klase) podataka.

- c) Najveću frekvenciju ima interval s pročitanim 2 do 3 knjige, odnosno najveći dio učenika pročitao je 2 ili 3 knjige. Na dijagramu to je najviši stub koji ujedno ukazuje na modalnu klasu. Kod većeg broja pročitanih knjiga frekvencije su manje, pa možemo zaključiti da rezultati ukazuju na to da postoji prostor za podsticanje čitanja.



- d) Ako uporedimo visine stubova na stubičastom dijagramu (frekvencije), lako ćemo uočiti da postoji neočekivano mali broj učenika koji čitaju veliki broj knjiga u poređenju s učenicima koji su pročitali jednu ili nijednu knjigu.

Zadatak 2

Grupisani podaci o visini učenika (u cm):

- Nacrtaj stubičasti dijagram za grupisane podatke.
- Odredi modalnu klasu.
- Odredi klasu u kojoj se nalazi medijana.

Interval	Frekvencija
150 – 154	3
155 – 159	7
160 – 164	10
165 – 169	5
170 – 174	2

Primjer 3

Učenici sedmog razreda odlučili su da istraže koliko koraka naprave dnevno u prosjeku. Tokom jedne sedmice brojali su korake koje naprave svaki dan i zapisali podatke. Radi lakše analize, odlučili su da grupišu podatke u intervale:

Broj koraka dnevno	Frekvencija (broj učenika)
2000 – 3999	4
4000 – 5999	6
6000 – 7999	10
8000 – 9999	8
10000 – 11999	5

- Koji interval predstavlja modalnu klasu podataka?
- Šta to znači u odnosu na fizičku aktivnost učenika?

Rješenje:

- Iz tabele se vidi da najveću frekvenciju ima interval 6000 – 7999 koraka (sa 10 učenika). Modalna klasa je 6000 – 7999 koraka dnevno.
- To znači da najveći broj učenika u ovom istraživanju dnevno napravi između 6000 i 7999 koraka. Prema preporukama za fizičku aktivnost, za zdrav život je dobro da učenici naprave najmanje 10 000 koraka dnevno. Ovi podaci pokazuju da se većina učenika treba kretati više kako bi poboljšali svoju fizičku aktivnost.

Zadatak 3

Ilir je sproveo istraživanje o broju stranica koje učenici čitaju za domaći zadatak u toku jedne sedmice. Prikupljene podatke grupisao je u intervale.

- Koliki je ukupan broj učenika od kojih je prikupio podatke?
- Koja je modalna klasa?
- Donesi zaključak o čitalačkim navikama učenika.

Interval (broj pročitanih stranica)	Frekvencija (broj učenika)
1 – 10	2
11 – 20	5
21 – 30	8
31 – 40	3
41 – 50	2

Zadatak 4

Na času fizike učenici sedmog razreda izveli su eksperiment da istraže kako različite površine utiču na broj odbijanja loptice pri padu s visine od 1 metar. Za svaki od 20 pokušaja učenici su zabilježili broj odbijanja loptice. Rezultati (broj odbijanja): 3, 4, 4, 5, 3, 3, 6, 4, 5, 4, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 4, 3, 4, 5.

- Prikaži podatke tabelom za grupisane podatke (koristi intervale 3–4, 5–6 odbijanja).
- Nacrtaj dijagram.
- Protumači rezultate:
 - Odredi koja je modalna klasa i šta to ukazuje o efektu površine na odbijanja.
 - Objasni šta može značiti ako neki interval ima znatno manju frekvenciju od drugog.
 - Razmisli kako kvalitet površine (npr. glatka ili hrapava) može uticati na broj odbijanja.
 - Predloži mjere ili dodatne eksperimente koji bi pomogli da se dobije jasnija slika o uticaju različitih tipova površina na odbijanja loptice.

Dodatni izazov za eksperiment:

Izvedi eksperiment u kojem će se koristiti tačno definisane površine (npr. guma, plastika, metal) da se izmjeri broj odbijanja loptice na svakoj površini. Analiziraj rezultate da bi utvrdio da li postoji korelacija između vrste površine i broja odbijanja.

Ako su u jednoj sportskoj sekciji sportisti podijeljeni prema broju treninga sedmično, a modalna klasa je 5–6 treninga, šta možeš zaključiti o navikama sportista? Da li to znači da većina sportista trenira dovoljno, previše ili premalo? Kako bi iskoristio ovaj podatak da poboljšaš sportske rezultate grupe?

Precrtaj tabelu u svesku i popuni je. Diskutuj o tvojim odgovorima sa svojim drugovima iz razreda.

Vještina	Potpuno savladano	Djelimično savladano	Potrebna mi je pomoć
Grupisanje podataka po intervalima			
Crtanje dijagrama frekvencije			
Tumačenje rezultata iz dijagrama			
Primjena naučenog u svakodnevnim kontekstima			

Samostalni rad

1. U muzeju u tvom gradu sprovedena je anketa o starosti posjetilaca tokom jednog dana. Podaci su grupisani u sljedeće intervale:

Uzrast posjetioca muzeja.

Interval (starost)	Frekvencija (broj posjetilaca)
15 – 24	12
25 – 34	18
35 – 44	10
45 – 54	8
55 – 64	5

- Koliko posjetilaca je bilo u muzeju tog dana?
- Koja je modalna klasa?
- Šta možeš zaključiti iz modalne klase?

2. Jedan menadžer želio je da poveća zaradu svoje kompanije, ali je znao da treba da uloži u marketing.

Nakon istraživanja za posljednjih 15 mjeseci ulaganja sredstava u marketing, dobijeni su sljedeći podaci:

Potrošena sredstva (denari)	Broj mjeseci
1 – 10000	1
10001 – 20000	2
20001 – 30000	4
30001 – 40000	7
40001 – 50000	1

- Nacrtaj dijagram frekvencije za grupisane podatke.
- Odredi modalnu klasu.
- Nadi klasu koja sadrži medijanu.
- Ako želi da poveća ulaganje u marketing za 15 %, prema kojoj mjeri srednje vrijednosti treba da se odluči – prema modalnoj klasi ili prema klasi koja sadrži medijanu?

3. U jednom eksperimentu, grupa učenika sadi 50 sjemenki iste vrste biljke u različitim uslovima: odgovarajuća vlažnost i nedostatak vode. Nakon 30 dana oni mjere visinu biljaka i zapisuju rezultate u centimetrima.

Odgovarajuća vlažnost:

12 15 12 13 14 9 16 18 20 21
 14 17 12 15 16 22 15 19 24 8
 17 13 14 9 16 18 20 21 9 20
 8 15 13 14 9 16 18 20 21 10
 10 9 12 16 19 8 16 17 24 21

Nedostatak vode:

7	9	12	11	10	9	15	8	6	19
4	8	14	15	7	10	12	19	3	11
17	13	9	5	11	6	4	13	9	2
15	13	10	6	9	8	15	20	13	8
9	9	7	13	18	8	6	10	22	5

- Grupiraj podatke po intervalima od 5 cm i izradi dijagram frekvencije za svaki uslov.
- Protumači rezultate i objasni kakve uticaje imaju različiti uslovi na rast biljaka.

Dodatni izazov: Napravi vlastito istraživanje o uticaju drugih faktora na rast biljaka.

- Prikupi podatke o godišnjim padavinama u tri različita geografska regiona: planinski, primorski i nizijski. Grupiraj podatke po intervalima od 100 mm i izradi dijagrame frekvencije za svaki region. Protumači rezultate, pri čemu ćeš objasniti kako geografske karakteristike utiču na količinu padavina.

Procjena i računanje aritmetičke sredine. Poređenje dva skupa podataka.

Zamisli da tvoj omiljeni sportski tim odigra nekoliko utakmica i ti želiš da saznaš koliko poena u prosjeku osvaja po utakmici. Ili možda želiš da uporediš koji od dvojice sportista je postojaniji u svojim rezultatima. Za opisivanje ovakvih situacija korisni su aritmetička sredina, medijana, moda i rang.

U ovoj lekciji naučit ćeš kako da procijeniš aritmetičku sredinu iz podataka prikazanih dijagramima, a zatim da provjeriš svoju procjenu računanjem. Takođe, upoređivat ćeš dva različita skupa podataka koristeći različite metode. Ove vještine pomoći će ti da analiziraš informacije i donosiš bolje odluke u svakodnevnom životu!



Primjer 1

U datoj tabeli prikazano je koliko su knjiga pročitali 15 učenika tokom ljetnog raspusta:

- Koja je moda za ove podatke?
- Odredi medijanu.
- Odredi rang podataka.

Broj knjiga	Broj učenika
1	2
2	3
3	5
4	3
5	2

Rješenje:

Moda: 3 (5 učenika pročitalo je po 3 knjige), medijana: 3, rang: $5 - 1 = 4$

Zadatak 1

Amra je mjerila vremena 40 svojih drugara koji su učestvovali u trci na 100 metara:

- Odredi modalnu klasu.
- Ako poredamo vremena, u kojem intervalu bi bila medijana?

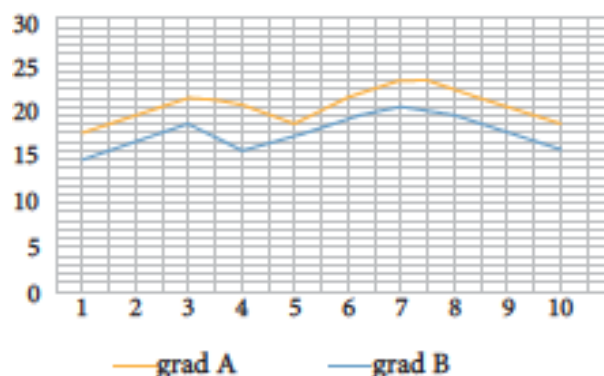
Vrijeme (sekunde)	Broj učenika
12 - 14	4
15 - 17	10
18 - 20	15
21 - 23	8
24 - 26	3

Primjer 2

Na sljedećem linijskom dijagramu prikazane su prosječne dnevne temperature (u °C) u dva različita grada A i B tokom 10 dana.

- Procijeni aritmetičku sredinu za temperature u gradu A i gradu B na osnovu dijagrama.
- Izračunaj tačnu aritmetičku sredinu za svaki grad i uporedi je sa svojom procjenom.
- Odredi medijanu za svaki grad.
- Odredi modu za svaki grad, ako postoji.
- Odredi rang temperatura za svaki grad.
- Koji grad ima postabilnije temperature? Objasni svoj odgovor na osnovu izračunatih vrijednosti.

Temperature u dva grada



Rješenje:

a) Procjena aritmetičke sredine

Grad A: Vrijednosti su između 18 i 24, pa je procijenjena sredina oko 21 °C.

Grad B: Vrijednosti su između 15 i 21, pa je procijenjena sredina oko 18 °C.

b) Izračun aritmetičke sredine

Aritmetička sredina je količnik zbira svih podataka i broja sabiraka

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{Grad A: } \bar{X}_A = \frac{18+20+22+21+19+23+24+22+20+19}{10} = 20,8^\circ\text{C}$$

$$\text{Grad B: } \bar{X}_B = \frac{15+17+19+16+18+20+21+20+18+16}{10} = 18^\circ\text{C}$$

c) Medijana:

$$\text{Grad A: } 18, 19, 19, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 24 \rightarrow \text{medijana} = \frac{20+21}{2} = 20,5^\circ\text{C}$$

$$\text{Grad B: } 15, 16, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21 \rightarrow \text{medijana} = \frac{18+18}{2} = 18^\circ\text{C}$$

Budući da postoji paran broj podataka, medijana je aritmetička sredina dvaju srednjih podataka (onih koji se nalaze u sredini u poredanom nizu podataka).

d) Moda

Grad A: 19, 20 i 22 se pojavljuju po dva puta $\rightarrow$ moda = 19, 20 i 22 (ovo je primjer kada skup podataka ima više od jedne mode).

Grad B: 16, 18 i 20 se pojavljuju po dva puta $\rightarrow$ moda = 16, 18 i 20.

e) Rang

$$\text{Grad A: } 24 - 18 = 6^\circ\text{C}; \text{ Grad B: } 21 - 15 = 6^\circ\text{C}$$

f) Poređenje temperature u dva grada

Grad A ima višu aritmetičku sredinu (20,8 °C naspram 18,0 °C).

Grad B ima niže temperature, ali isti rang temperatura (6 °C).

Promjene u temperaturama su slične u oba grada jer je vrijednost ranga ista.

Iako oba grada imaju isti temperaturni rang, grad A generalno ima topliju klimu.

Zadatak 2

Jedna škola sprovela je testiranje za medijsku pismenost u 2 odjeljenja sedmog razreda. Iz svakog odjeljenja nasumično je testirano po 10 učenika, a sljedeća tabela prikazuje dobijene rezultate (bodovi od 0 do 10).

Tabela: Rezultati testa iz medijske pismenosti

Učenik	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7 A	6	8	5	7	6	9	8	6	7	5
7 B	7	6	9	8	6	5	9	7	6	8

- Procijeni aritmetičku sredinu rezultata za oba odjeljenja.
- Izračunaj tačnu aritmetičku sredinu za svako odjeljenje i uporedi je sa svojom procjenom.
- Koje odjeljenje ima veću medijanu?
- Odredi rang rezultata za svako odjeljenje.
- Koje odjeljenje ima ravnomjerniju raspodjelu rezultata? Objasni.

Primjer 3

Grupa učenika iz sedmog razreda izvršila je mjerenja brzine biciklista koji voze na biciklističkoj stazi pored školskog dvorišta. Oni su izmjerili brzine (u km/h) kod 10 biciklista i organizovali podatke u sljedeću tabelu:

Biciklista	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Brzina (km/h)	12	15	14	13	15	17	16	14	15	18

- Procijeni aritmetičku sredinu brzina biciklista.
- Izračunaj tačnu aritmetičku sredinu brzina.
- Odredi medijanu podataka.
- Koji podatak je moda za date podatke?
- Odredi rang podataka.
- Ako je maksimalno dozvoljena brzina na biciklističkoj stazi 15 km/h, koliko biciklista je prešlo tu brzinu?
- Šta možeš zaključiti o bezbjednosti biciklista i drugih učesnika u saobraćaju na osnovu podataka?

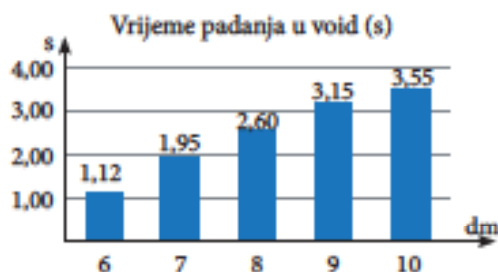
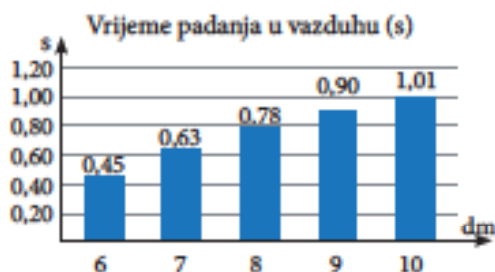
Rješenje:

- Procjena aritmetičke sredine:
Brzine se uglavnom kreću od 12 do 18 km/h, a najčešće su oko 15 km/h.
Znači, procijenjena aritmetička sredina je oko 15 km/h.
- Proračun aritmetičke sredine:
$$\bar{X} = \frac{12+15+14+13+15+17+16+14+15+18}{10} = 14,9 \text{ km/h.}$$
- Medijana: Poredane brzine: 12, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 17, 18
Srednje dvije vrijednosti su 15 i 15, pa je medijana = $\frac{15+15}{2} = 15 \text{ km/h.}$
- Moda: Broj 15 km/h pojavljuje se najčešće (3 puta) znači moda = 15 km/h.
- Rang: Rang = 18 - 12 = 6 km/h.

- f) Brzine iznad dozvoljene granice (15 km/h):
Vrijednosti iznad 15 km/h: 17, 16, 18.
Tri biciklista su prešla dozvoljenu brzinu.
- g) Zaključak o bezbjednosti:
Prosječna brzina je 14,9 km/h, što je veoma blizu dozvoljene granice.
Tri biciklista su prešla dozvoljenu brzinu, što može predstavljati potencijalni rizik.
Moguće je razmotriti mjere za poboljšanje bezbjednosti, kao što su postavljanje znakova za ograničenje brzine ili podizanje svijesti o rizicima prebrze vožnje.

Zadatak 3

Grupa učenika u laboratoriji iz fizike ispušta loptu s različitih visina i mjeri vrijeme njenog pada. Eksperiment se izvodi u dva različita okruženja: u vazduhu i u vodi. Podaci mjerenja prikazani su stubičastim dijagramima:



- Procijeni aritmetičku sredinu vremena pada u vazduhu i u vodi na osnovu grafikona.
- Izračunaj tačnu aritmetičku sredinu za svaki slučaj.
- Odredi medijanu vremena pada za oba okruženja.
- Odredi rang podataka za vazduh i za vodu.
- Koristeći dobijene vrijednosti, uporedi dva okruženja. Kako okruženje utiče na vrijeme pada?

Posmatrani su vremenski uslovi u dva različita područja (planinsko i ravničarsko) u Sjevernoj Makedoniji tokom jedne sedmice. U planinskom području temperatura je niža, a padavine su češće, dok su u ravničarskom području temperature više, ali su padavine rjeđe.

Kako bi analizirao podatke o temperaturi i padavinama u oba područja u zavisnosti od vremenskih uslova? Šta bi od sljedećeg koristio da procijeniš razliku: aritmetičku sredinu, medijanu, modu?

Šta bi značilo ako je aritmetička sredina za temperaturu u planinskom području niža od one u ravničarskom, a količina padavina veća?

Kako će se to odraziti na život ljudi u tim područjima?

„Zvezdani vodič“

Koristi pet zvezdica da ocijeniš svoje razumijevanje lekcije.



- Ne razumijem ništa.



- Razumijem neke osnovne pojmove.



- Razumijem većinu stvari, ali ima i nešto što mi nije sasvim jasno.



- Razumijem većinu stvari i mogu ih objasniti drugima.



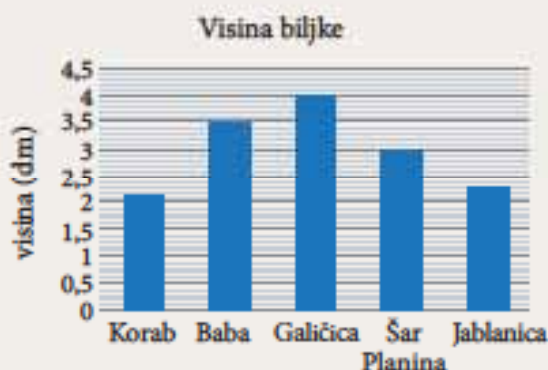
- Potpuno razumijem materijal i mogu ga primijeniti u različitim situacijama.

Zapiši broj zvezdica za koji smatraš da odražava tvoje znanje na kraju lekcije i možeš dodati kratke komentare ako ti je potrebna pomoć ili ako ima nešto što ti nije jasno.

Samostalni rad

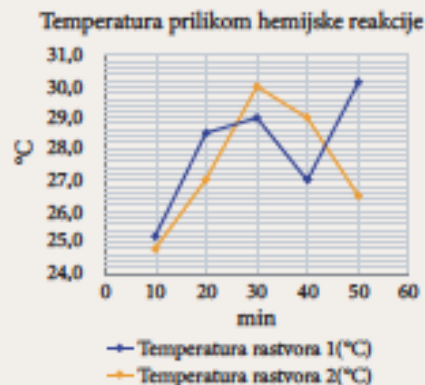
1. Podaci o visini biljke paprat na nekoliko planina u Sjevernoj Makedoniji prikazani su stubičastim dijagramom:

- Procijeni aritmetičku sredinu za visinu paprati.
- Izračunaj tačnu aritmetičku sredinu.
- Nađi rang, medijanu i modu za visine biljke.



2. Linijskim dijagramom dati su podaci o promjeni temperature rastvora tokom izvođenja hemijske reakcije.

- Procijeni aritmetičku sredinu za temperaturu rastvora.
- Izračunaj tačnu aritmetičku sredinu.
- Uporedi rezultate za temperaturu rastvora koristeći rang, medijanu i modu. Kolika je razlika između najviše i najniže temperature?



3. U dva odjeljenja jedne škole izmjerene su visine nekoliko učenika. Podaci su prikazani u tabeli ispod:

Učenici	Odjeljenje A (visina u cm)	Odjeljenje B (visina u cm)
Učenik 1	150	155
Učenik 2	160	162
Učenik 3	155	160
Učenik 4	165	168
Učenik 5	158	154

- Procijeni aritmetičku sredinu visina za svako odjeljenje.
- Koje odjeljenje ima veću aritmetičku sredinu?
- Uporedi podatke o visini učenika iz oba odjeljenja koristeći rang. Koji učenik i iz kojeg odjeljenja je najviši?
- Koje odjeljenje ima veću medijanu visina?

4. Jedan učenik je mjerio koliko vode pije svaki dan tokom jedne sedmice. Podaci su prikazani linijskim dijagramom:



- Procijeni aritmetičku sredinu količine vode koju je učenik popio.
- Provjeri procjenu izračunavanjem tačne aritmetičke sredine.

5. Timovi iz dva odjeljenja napravili su anketu o broju sati koje učenici provode u učenju svake sedmice. Rezultati su prikazani u tabeli:

- Uporedi aritmetičke sredine oba tima.
- Koji tim ima više sati provedenih u učenju?

Tim	A	B
Broj sati	4, 6, 7, 9, 10	3, 5, 7, 8, 6

6. Marta i Nikola rješavali su zadatke tokom 4 dana. Podaci su prikazani u tabeli:

Broj časova provedenih u rešavanju zadataka

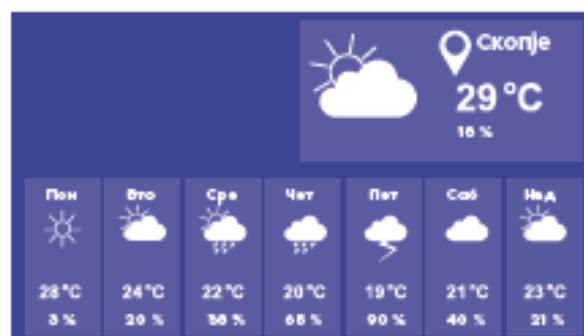
Ime	Marta	Nikola
Vrijeme (h)	3, 5, 2, 7	2, 6, 4, 8

- Koristi medijanu da uporediš vrijeme koje je svako od njih proveo u rešavanju zadataka.
- Ko je od njih imao duži prosječan period rešavanja zadataka?

Ishodi. Vjerovatnost

Svaki dan donosimo odluke i predviđamo šta može da se desi – hoće li padati kiša, hoćemo li pobijediti u nekoj igri ili hoćemo li pri bacanju kocke dobiti određeni broj. Ovo su primjeri vjerovatnoće, koja nam pomaže da razumijemo koliko je moguće da se nešto dogodi.

U ovoj lekciji ćeš naučiti kako da koristiš jezik vjerovatnoće da opišeš i tumačiš rezultate različitih događaja.



Naučićeš kako da identifikuješ sve moguće ishode jednog događaja, kako da ih klasifikuješ kada su međusobno isključivi i kako da izračunaš vjerovatnoću kada su svi ishodi jednaki.

Primjer 1

Zamisli da si na rođendanskoj zabavi i da ti je ponuđeno da učestvuješ u igri s kockom.

Na svakoj strani kocke nalazi se određen broj tačaka (1, 2, 3, 4, 5 ili 6).

Tvoj zadatak je da predviđiš šta će se desiti na osnovu ovih informacija:

- Koji su događaji koji će se sigurno desiti, a koji je nemoguće da se dese?
- Koji događaji imaju istu vjerovatnoću da se dese?
- Daj primjer događaja koji imaju različitu vjerovatnoću da se dese.
- Koji su svi mogući ishodi pri bacanju kocke?

Rješenje:

- Siguran događaj je da će se na gornjoj strani kocke pojaviti od 1 do 6 tačaka, a nemoguće je da se pojavi više od 6 ili manje od 1 tačke.
- Jednako je moguće da se na gornjoj strani kocke pojavi paran ili da se pojavi neparan broj tačaka.
- Događaji koji imaju različitu vjerovatnoću da se dese su, na primjer: da se na gornjoj strani kocke pojavi manje od 2 tačke ili da se na gornjoj strani kocke pojavi više od 2 tačke.
- Mogući ishodi pri bacanju kocke su:
 - „Na gornjoj strani kocke da se pojavi 1 tačka“;
 - „Na gornjoj strani kocke da se pojave 2 tačke“;
 - „Na gornjoj strani kocke da se pojave 3 tačke“;
 - „Na gornjoj strani kocke da se pojave 4 tačke“;
 - „Na gornjoj strani kocke da se pojavi 5 tačaka“;
 - „Na gornjoj strani kocke da se pojavi 6 tačaka“.

Svaki rezultat nekog djelovanja ili svaki ishod nekog eksperimenta naziva se elementarni događaj. Skup elementarnih događaja naziva se događaj.

Elementarne događaje koje sa sigurnošću možemo predvidjeti, jer su nam poznati svi uzroci njihovog pojavljivanja, nazivamo sigurni događaji.

Elementarne događaje koji se nikada ne mogu desiti nazivamo nemogući događaji.

Zadatak 1

Mile izvlači jedan čarape iz fioke bez gledanja. Ako se zna da u njegovoj fioci ima 10 čarapa, od kojih je 6 crnih, 2 plave i 2 zelene, odgovori:

- Koliko mogućih ishoda ima pri izvlačenju jedne čarape iz fioke?
- Koji su mogući ishodi koji se međusobno isključuju? Objasni ih.
- Koji je sigurni događaj pri izvlačenju čarape iz Miline fioke, a koji nemogući?
- Da li je jednaka mogućnost da Mile izvuče crnu ili zelenu čarapu? Da li je jednaka mogućnost da izvuče plavu ili zelenu čarapu? Objasni zašto.

Primjer 2

Matej i Sofija igraju igru s kolom sreće. Kolo je podijeljeno na 4 crvena, 3 plava i 3 žuta polja. Na njemu se nalazi strelica, tako da nakon okretanja kola strelica pokazuje na neku od boja.

- Nabroji sve ishode koji se mogu dobiti pri okretanju kola?
- Kolika je vjerovatnoća da strelica stane na crveno polje?
- Kolika je vjerovatnoća da strelica stane na zeleno polje?
- Kolika je vjerovatnoća da strelica stane na crveno, plavo ili žuto polje?
- Kolika je vjerovatnoća da strelica stane na plavo ili žuto polje?
- Koji su mogući ishodi koji se međusobno isključuju? Objasni ih.

Vjerovatnoća događaja je brojna vrijednost koja izražava šansu ili vjerovatnoću da će se određeni događaj desiti. To je broj između 0 i 1, gdje 0 označava da je događaj nemoguć, a 1 da je događaj siguran.

Vjerovatnoća događaja računa se kao odnos broja povoljnih ishoda prema ukupnom broju mogućih ishoda u određenom eksperimentu, odnosno:

$$\text{vjerojatnost} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{ukupni broj ishoda}}$$

Rješenje:

- a) Mogući ishodi pri okretanju kola: „Strelica staje na crveno polje“, „Strelica staje na plavo polje“ i „Strelica staje na žuto polje“.
- b) Vjerovatnoća da strelica stane na crveno:
Broj crvenih polja (povoljni ishodi) = 4
Ukupan broj polja = $4 + 3 + 3 = 10$
$$\text{vjerovatnoća (crveno polje)} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{ukupni broj ishoda}} = \frac{4}{10} = 0,4(40\%)$$
- c) Vjerovatnoća da strelica stane na zeleno polje:
Broj zelenih polja (povoljni ishodi) = 0
$$\text{vjerovatnoća (zeleno polje)} = \frac{0}{10} = 0 \rightarrow \text{nemoguć događaj}$$
- d) Pošto je događaj „Strelica staje na crveno ili plavo ili žuto polje“ siguran događaj, odnosno u svakom slučaju strelica će stati na polje s jednom od boja koje postoje na kolu, vjerovatnoća je 1 odnosno:
$$\text{vjerovatnoća (crveno ili žuto ili plavo polje)} = \frac{4+3+3}{10} = \frac{10}{10} = 1(100\%) \rightarrow \text{siguran događaj}$$
- e) Vjerovatnoća da strelica stane na plavo ili žuto polje:
Broj plavih polja = 3, broj žutih polja = 3, ukupno povoljnih ishoda = $3 + 3 = 6$
$$\text{vjerovatnoća (plavo ili žuto polje)} = \frac{6}{10} = 0,6(60\%)$$
- f) Ishodi koji se međusobno isključuju su, na primjer, da strelica istovremeno stane na zeleno i crveno polje (prema definisanim ishodima, strelica može pokazivati samo na jedno polje).

Ishodi koji se međusobno isključuju su ishodi koji se ne mogu desiti istovremeno. Jednako vjerovatni ishodi su ishodi koji imaju istu vjerovatnoću da se dese.

Zadatak 2

U jednoj kutiji ima 12 loptica: 4 su crvene, 3 zelene, 2 žute i 3 plave. Jasno je da se u jednom trenutku vadi samo jedna loptica.

- Koliko mogućih ishoda ima pri izvlačenju jedne loptice iz kutije?
- Koji su mogući ishodi koji se međusobno isključuju? Objasni ih.
- Kolika je vjerovatnoća da izvučeš zelenu lopticu?
- Ako izvučeš lopticu i ona je žuta i ne vratiš je u kutiju, kolika je vjerovatnoća da izvučeš crvenu lopticu?

Zadatak 3

Ana i Bojan igraju igru sa dvije kocke. Kada bace obje kocke, sabiraju dobijene brojeve (broj tačkica koji se pojavio na gornjoj strani kocke). Pobjednik je onaj ko dobije zbir 10 ili veći.

Ana kaže: „Imam velike šanse da pobijedim!“

Bojan kaže: „Mislim da je jednako moguće da dobijemo zbir 10 ili ne!“

- Koje moguće sume se mogu dobiti pri bacanju dvije kocke?
- Kolika je vjerovatnoća da zbir bude 10 ili veći?
- Da li je Ana u pravu kada kaže da ima velike šanse da pobijedi?

Primjer 3

Marko ujutro gleda vremensku prognozu koja pokazuje da postoji 0,7 (70 %) vjerovatnoća za kišu tokom dana. On razmišlja: „Da li da ponesem kišobran sa sobom ili ne?“

Njegov drug Viktor mu kaže: „Ne nosi kišobran, ima 30 % šanse da neće padati kiša!“

- Kako da razumijemo vjerovatnoću 0,7 da će padati kiša?
- Kolika je vjerovatnoća da neće padati kiša?
- Šta bi ti savjetovao Marku – da ponese kišobran ili ne?

Rješenje:

- Vjerovatnoća za kišu je 0,7 (70 %), što znači da su šanse da pada kiša veće.
- Ova dva ishoda se isključuju, pa je vjerovatnoća da NE pada kiša $1 - 0,7 = 0,3$ (30 %), što znači da je manja šansa da ostane suho.
- Vjerovatnoća za kišu je veća od 50 %, što znači da je pametnije da Marko ponese kišobran!

Šta si naučio iz primjera?

- Vjerovatnoća nam pomaže da donosimo bolje odluke u svakodnevnom životu.
- Mali rizik (kao u primjeru za nošenje kišobrana) može nam pomoći da izbjegnemo veliki problem (da se pokvasimo).

Kada su šanse za pojavu događaja veće od 50 %, tada se događaj smatra vjerovatnim. Ovo znači da je vjerovatnoća događaja veća od 0,5, što ukazuje na to da događaj ima veću šansu da se desi nego da se ne desi.

Zadatak 4

Marko i Jovana igraju igru sa dvije različite kocke. Na svakoj kocki su obilježeni brojevi od 1 do 6. Svako od njih baca istovremeno obje kocke. Ko ima veću vjerovatnoću da pobijedi ako: Marko pri bacanju obje kocke treba da dobije zbir veći od 7, a Jovana zbir manji ili jednak 7?

U kojim situacijama u svakodnevnom životu koristimo vjerovatnoću za donošenje odluka?

Možeš li navesti primjere?

Ukoliko u jednoj školi postoji vjerovatnoća od 0,8 da će se sutra održati takmičenje iz matematike, kako bi protumačio tu informaciju? Da li treba da se pripremiš?

U svesku prepisi i popuni tabelu.

Tvrdnje	Ne mogu	Djelimično mogu	Potpuno mogu
Određujem vjerovatnoću na osnovu jednako vjerovatnih ishoda u jednostavnim problemima.			
Mogu koristiti brojeve od 0 do 1 da opišem vjerovatnoću.			
Mogu identificirati sve moguće ishode koji se međusobno isključuju kod jednog događaja.			
Mogu dati primjer iz stvarnog života gdje mi vjerovatnoća pomaže da donesem odluku.			

Samostalni rad

- Kolika je vjerovatnoća pri bacanju kocke za igru da je na gornjoj strani kocke paran broj, a kolika je vjerovatnoća da je neparan broj?
 - Da li događaji „Na gornjoj strani kocke pojavile su se 1 ili 2 tačke“ i „Na gornjoj strani kocke pojavile su se 5 ili 6 tačaka“ imaju istu vjerovatnoću da se dogode? Objasni.
 - Koji događaj ima veću vjerovatnoću: „Na gornjoj strani kocke pojavile su se paran broj tačaka“ ili „Na gornjoj strani kocke pojavile su se najmanje 2 tačke“?
- Izaberi slučajan broj između 1 i 10.
 - Koliko mogućih ishoda ima?
 - Da li postoji jednaka vjerovatnoća da se izabere paran ili da se izabere neparan broj?
- Izaberi slučajan broj između 1 i 25.
 - Koliko mogućih ishoda ima?
 - Kolika je vjerovatnoća da se odabere prost broj?
 - Navedi primjer ishoda koji se međusobno isključuju.
 - Da li ishod „Izabran je neparan broj“ isključuje ishod „Izabran je prost broj“?

4. Igraš igru sa bacanjem kocke. Ako se nakon bacanja na gornjoj strani kocke pojavi 6 tačaka, osvajaš nagradu. Ako pak na gornjoj strani se pojavi broj tačaka manji od 6, gubiš.
- Koji je odnos vjerovatnoća za pobjedu i poraz?
 - Da li je ova igra fer? Objasni zašto.
 - Ako organizator želi da učini igru pravednijom, kako može promijeniti pravilo?
5. U jednom plesnom klubu članova je 50. Članovi treniraju prema dobi, mladi do 18 godina i odrasli stariji od 18 godina. U tabeli je dato koliko članova ima prema spolu i dobi.

Tabela – Broj članova u klubu prema polu i dobi.

	Mladi	Odrasli
Žene	15	10
Muškarci	12	13

Ako se slučajno izabere jedan član, kolika je vjerovatnoća da on bude:

- žena
- odrastao muškarac
- mlado lice
- mlada žena

Eksperimentalna i teorijska vjerovatnoća

U ovoj lekciji ćeš se upoznati sa pojmom eksperimentalne vjerovatnoće, kao i s načinom njenog izračunavanja. Moći ćeš da uočiš razlike između eksperimentalne i teorijske vjerovatnoće i da praviš poređenja u jednostavnim situacijama. Također, kada prikupiš podatke pri izvođenju nekog eksperimenta, naučit ćeš kako da ih iskoristiš da izračunaš vjerovatnoću za događaje koji su se desili, a zatim ćeš moći da ih uporediš s teorijskim procjenama.

Ovo znanje će ti pomoći da razumiješ kako funkcionišu vjerovatnoće i da naučiš kako da ih koristiš u stvarnom životu.



Primjer 1

U kutiji se nalaze 4 loptice u različitim bojama: crvena, žuta, zelena i plava. Ti treba da izvlačiš po jednu lopticu iz kutije.

- Koja je vjerovatnoća da izvučena loptica bude crvena?
- Koja je vjerovatnoća da izvučena loptica bude žuta?
- Koja je vjerovatnoća da izvučena loptica bude zelena?
- Koja je vjerovatnoća da izvučena loptica bude plava?

Rješenje:

Budući da u kutiji ima 4 loptice i od svake boje ima po 1 lopticu, svi ishodi su jednako vjerovatni i oni se međusobno isključuju. Vjerovatnoća za svaki ishod je $\frac{1}{4}$.

Zadatak 1

Na polici u sobi kod Jovane nalaze se 3 knjige poezije, 5 knjiga trilera i 7 knjiga stručne literature. Jovana voli da čita trilere. Izračunaj vjerovatnoću da će jednim izvlačenjem s police bez gledanja Jovana pogoditi svoj čitalački ukus?

Primjer 2

U kutiji se nalaze 3 crvene loptice i 2 zelene loptice. Izvlačiš jednu lopticu bez gledanja.

- Izračunaj teorijsku vjerovatnoću da se izvuče crvena loptica.
- Izvedi eksperiment: izvuci 10 puta po jednu lopticu iz kutije s vraćanjem i zapiši rezultate.
- Izračunaj eksperimentalnu vjerovatnoću za izvlačenje crvene loptice prema rezultatima eksperimenta.
- Uporedi teorijsku i eksperimentalnu vjerovatnoću.

Rješenje:

- a) Teorijska vjerovatnoća = $\frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{ukupan broj ishoda}}$

Broj povoljnih ishoda je 3 jer u kutiji ima 3 crvene loptice, dok je ukupan broj ishoda 5 (ukupan broj loptica u kutiji).

Znači teorijska vjerovatnoća (crvena loptica) = $\frac{3}{5} = 0,6$ (60 %).

- b) Izvođenjem eksperimenta dobili smo sljedeće rezultate pri izvlačenju loptice 10 puta bez gledanja i uz vraćanje izvučene loptice u kutiju:

Izvlačenje	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Loptica/boja	crvena	zelena	crvena	crvena	zelena	crvena	crvena	crvena	zelena	crvena

Znači, od svih 10 izvlačenja 7 puta je izvučena crvena loptica.

$$\text{Eksperimentalna vjerovatnoća} = \frac{\text{broj uspješnih ishoda u eksperimentu}}{\text{ukupan broj pokušaja}}$$

- c) Prema dobijenim rezultatima iz eksperimenta, imamo 7 uspješnih ishoda od ukupno 10 pokušaja, odnosno: eksperimentalna vjerovatnoća $= \frac{7}{10} = 0,7(70\%)$
- d) Poređenje teorijske i eksperimentalne vjerovatnoće:
 U ovom primjeru teorijska vjerovatnoća je 0,6, dok je eksperimentalna vjerovatnoća 0,7. Iako je eksperimentalna vjerovatnoća malo veća od teorijske, to je sasvim u redu. To je zbog činjenice da eksperimenti mogu davati različite rezultate svaki put kada se izvode. Povećavanjem broja izvlačenja, vrijednost eksperimentalne vjerovatnoće će se sve više približavati vrijednosti teorijske vjerovatnoće.

Kada bismo ponovili eksperiment 20, 30, 40... puta, dobijali bismo različit broj uspješnih ishoda, ali količnik između uspješnih ishoda i ukupnog broja pokušaja bio bi vrijednost bliska teorijskoj vjerovatnoći, odnosno 0,6.

Zadatak 2

Igraj igru s kockom koja na svakoj strani ima različit broj tačaka: 1, 2, 3, 4, 5 i 6.

- Izračunaj teorijsku vjerovatnoću da se nakon jednog bacanja kocke na gornjoj strani pojavi broj 3.
- Izvedi eksperiment: baci kocku 20 puta i zapiši rezultate.
- Izračunaj eksperimentalnu vjerovatnoću da se na gornjoj strani kocke pojavi 3 tačke prema rezultatima eksperimenta.
- Uporedi teorijsku i eksperimentalnu vjerovatnoću.

Primjer 3

Lena i njeni prijatelji se takmiče u bacanju novčića. Takmičenje se sastoji od 50 bacanja novčića. Lena želi da izračuna vjerovatnoću da joj padne „pismo“ nakon 50 bacanja novčića i da je uporedi s teorijskom vjerovatnoćom.

- Izračunaj teorijsku vjerovatnoću da padne „pismo“ pri jednom bacanju novčića.
- Lena baca novčić 50 puta. U rezultatima dobija 22 puta „pismo“ i 28 puta „grb“. Izračunaj eksperimentalnu vjerovatnoću da padne „pismo“.
- Uporedi teorijsku i eksperimentalnu vjerovatnoću.

Rješenje:

- a) Novčić ima dva jednako vjerovatna ishoda: „grb“ ili „pismo“. Tada je teorijska vjerovatnoća da padne „pismo“ je $\frac{1}{2} = 0,5$
Teorijska vjerovatnoća da padne „grb“ pri jednom bacanju je 0,5 ili 50 %.
- b) Lena je bacila novčić 50 puta i dobila 22 puta „pismo“ i 28 puta „grb“.
- c) Poređenje teorijske i eksperimentalne vjerovatnoće:
- Teorijska vjerovatnoća je 0,5 ili 50 %.
 - Eksperimentalna vjerovatnoća je 0,44 ili 44 %.
- I ovdje važi napomena kao u primjeru 2 za vrijednost eksperimentalne i teorijske vjerovatnoće (razlika je rezultat slučajnosti koja se javlja pri ograničenom broju bacanja).

Zadatak 3

Vlasnik jedne farme živine ima 100 kokoši. 80 od njih nosi bijela jaja, a 20 nosi smeda. Da bi utvrdio koliko jaja u prosjeku će imati od svake vrste, farmer odlučuje da napravi eksperiment. Farmer pravi 5 različitih izvlačenja (testova) da vidi koliko često će izvući kokoši koje nose bijelo jaje. U svakom od ovih testova on izvlači 10 kokoši, posmatra kakva jaja će snijeti svaka i zapisuje rezultate.

Evo kako izgleda njegov eksperiment:

- Prvo izvlačenje 10 kokoši: rezultat je 8 bijelih jaja i 2 smeda;
- Drugo izvlačenje: 7 bijelih jaja i 3 smeda;
- Treće izvlačenje: 9 bijelih jaja i 1 smede;
- Četvrto izvlačenje: 8 bijelih jaja i 2 smeda;
- Peto izvlačenje: 6 bijelih jaja i 4 smeda.

Nakon ovih 5 različitih testova, farmer sumira sve rezultate za bijela i smeda jaja i koristi ih da izračuna eksperimentalnu vjerovatnoću.

- a) Izračunaj teorijsku vjerovatnoću da se izvuče kokoš koja će snijeti bijelo jaje i teorijsku vjerovatnoću da se izvuče kokoš koja će snijeti smede jaje.
- b) Izračunaj eksperimentalnu vjerovatnoću po svakom od 5 testova.
- c) Izračunaj eksperimentalnu vjerovatnoću sa sumiranim rezultatima nakon svih 5 testova.
- d) Analiziraj i uporedi rezultate teorijske i eksperimentalne vjerovatnoće. Objasni kakva bi bila vjerovatnoća za izvlačenje kokoši koja će snijeti smede jaje i zašto.

Šta bi se desilo ako farmer napravi 100 pokušaja umjesto samo 5? Kako bi se rezultat promijenio u poređenju s teorijskom vjerovatnoćom od 80 % za bijelo jaje?

Procijeni svoj rad, razmisli o tome šta si naučio i kako si primijenio pojam vjerovatnoće.

1. Mogu li da objasnim razlike između ova dva tipa vjerovatnoće? (Da/Ne)
2. Kada izračunavam eksperimentalnu vjerovatnoću, mogu li da je uporedim s teorijskom? (Da/Ne)
3. Znam li vezu između broja pokušaja koje ću napraviti pri eksperimentalnoj vjerovatnoći i vrijednosti teorijske vjerovatnoće? (Da/Ne)
4. Da li bolje razumijem principe vjerovatnoće nakon ove lekcije? (Da/Ne)

Ako si odgovorio s „Da“ na većinu pitanja, to znači da si uspješno razumio i primijenio lekciju. Ako imaš više odgovora „Ne“, razmisli o tome šta ti nije jasno i posveti vrijeme ponavljanju tih dijelova lekcije.

Samostalni rad

1. Marko igra igru s kockom s brojevima od 1 do 6. On baca kocku 20 puta. Tokom pokušaja dobio je sljedeće rezultate:
Jedna tačka na gornjoj strani kocke: 3 puta,
2 tačke: 4 puta,
3 tačke: 5 puta,
4 tačke: 4 puta,
5 tačaka: 2 puta,
6 tačaka: 2 puta.
 - a) Izračunaj vjerovatnoću da se svaki broj tačaka pojavi na gornjoj strani pri jednom bacanju kocke.
 - b) Izračunaj vjerovatnoću za svaki broj na osnovu podataka iz eksperimenta.
 - c) Uporedi vjerovatnoće iz a) i b). Šta zaključuješ?
2. Marija je 10 puta bacila novčić. Pri tome, u 6 slučajeva na gornjoj strani novčića pojavilo se „pismo“, a u 4 slučaja „glava“.
 - a) Izračunaj vjerovatnoću pri jednom bacanju da se na gornjoj strani novčića pojavi jedna od strana „pismo“ i „glava“.
 - b) Izračunaj vjerovatnoću za pojavljivanje svake strane novčića prema rezultatima Marijinog bacanja.
 - c) Uporedi vjerovatnoće. Objasni zašto se javlja ta razlika?

- 
3. Marko je odlučio da kupi kafu iz aparata koji ima tri opcije: makijato, espresso i kapučino. Makijato je izabran 40 puta, espresso 30 puta, a kapučino 30 puta u posljednjih 100 pokušaja.
 - a) Izračunaj teorijsku vjerovatnoću za to koja kafa će biti izabrana.
 - b) Izračunaj eksperimentalnu vjerovatnoću na osnovu podataka.
 - c) Uporedi teorijsku i eksperimentalnu vjerovatnoću i objasni da li se približavaju.
 4. Nataša se priprema za izlazak s prijateljima. U svom ormaru ima više komada odjeće u 3 različite boje: 2 crvena, 3 zelena i 5 žutih. Nataša ne može da se odluči za boju i bira bez gledanja u ormar.
 - a) Izračunaj teorijsku vjerovatnoću da izabere svaku od boja odjeće.
 - b) Napravi eksperiment s 20 izbora odjeće. Poslije svakog izbora komad odjeće se vraća u ormar. Izračunaj eksperimentalnu vjerovatnoću. (Napravi simulaciju izvlačenjem papirića iz kutije na kojima je zapisana boja odjeće)
 - c) Uporedi teorijsku i eksperimentalnu vjerovatnoću i razmisli o razlikama među vjerovatnoćama.
 5. Istražuj kako i koliko su uključene eksperimentalna i teorijska vjerovatnoća pri pripremi vremenske prognoze.

